

Inhoud.

GIDEONIS JANI VERDAM,

EX PAGO MYDRECHT BATAVI

COMMENTATIO

AD

QUÆSTIONEM ASTRONOMICAM,

A NOBILISSIMO DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM ORDINE ACADEMIÆ GANDAVENSIS PROPOSITAM,

ANNO M. DCCC. XXII.

» *Data duorum locorum differentia latitudinis et linea loxodro-*
» *mica, invenire differentiam longitudinis eorundem.*"

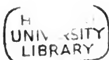
QUÆ PRÆMIUM REPORTAVIT DIE VII OCTOBRIS M.DCCC.XXIII.



GANDAVI,

APUD P. F. DE GOESIN - VERHAEGHE, ACADEMIÆ TYPOGRAPHUM.

1824.


H
UNIV RSITY
LIBRARY

PROLOGUS.

Priusquam ea exponam, quæ ad quæstionis solutionem conducunt, quædam præmonere oportet, tum de quæstione rite intelligenda, tum de ratione, quam in ejus solutione secuturus sum.

Quum ad difficultates, quibus premebar, sublevandas, me ad diversos scriptores contulissem, qui de linea loxodromica tractaverunt, nullum fere auxilium ab illis suppeditari inveni. Nam ut, quantum fieri posset, quæstioni satisfacerem, jam ab initio mihi visum est, talem significari lineam loxodromicam, quæ ducta intelligitur in sphæroïdis superficie. Tellure enim nostra non existente sphærica, a veritate, quamquam forte parum, deflectamur necesse est, si lineæ loxodromicæ, quoad navigationi inserviat, proprietatibus utamur, quum tellurem esse sphæram ponamus.

Quandoquidem autem in tellure sphæroidica, differentia inter æquatoris diametrum, atque ipsius telluris axem (gallice applatissement) *vel minima est, omnes scriptores, mihi cogniti, nisi excipias eruditissimum* Maupertuisium (1), *hanc differentiam neglexerunt,*

(1) Videatur *Œuvres de Maupertuis, tom. IV, Parallaxe de la lune*: sed inprimis conferri meretur ejus *Tractatus de linea loxodromica*, qui insertus est operi, *Mémoires de l'Académie Royale des sciences de Paris, an* 1744. — Rationem autem, qua utitur, non secutus sum, utpote scopo minus idoneam.

atque tellurem tanquam globum considerantes, loxodromiæ proprietates nobis tradiderunt.

Ut igitur ad quæstionis solutionem pervenirem, hanc viam ingressus sum: primum quidem, quid lineæ loxodromicæ, in sphæroidis superficie ductæ, et tanquam lineæ curvæ duplicis curvaturæ (*gall.*: ligne courbe à double courbure,) *consideratæ, proprium, indagare tentavi, et cum hæc satis constarent, talia ex illis collegi, quæ ad quæstionem solvendam postulabantur, quo facto ipsam solutionem exhibui. Divisi igitur hoc specimen in tres partes sive capita. Fortasse prolixius et fusius, tali modo rem exposui, quam opus esset; mihi autem, in rebus mathematicis tironi, alia via, qua citius ad scopum perveniri posset, non ostendebatur. Etenim non modo quæstio solvenda mihi erat, verum etiam primi fontes demonstrandi, ex quibus ea haurirem quæ hac de re requirebantur.*

Parte prima absoluta cum quæstionis indolem, mente intuerer, sic sese habere mihi apparuit. Dari nimirum arbitrabar differentiam latitudinum duorum locorum, id est dari numerum graduum, quibus locus alter sit altero ab æquatore remotior; neque igitur datur latitudo prioris loci, sed est incognita hæc; dari porro lineam loxodromicam, quæ per hosce locos transire intelligitur, id est, dari non modo angulum, quem vocant loxodromicum, sed etiam longitudinem ipsius loxodromicæ inter duos illos locos interceptam. Si autem his datis utor, in sphæroidis superficie, determinatus est angulus meridianorum per duos locos transeuntium, id est differentia longitudinis eorundem, si vero, dato tantum angulo loxodromico et differentia latitudinum, non detur longitudo illa ipsius loxodromicæ, quæstio indeterminata erit, quod e sequentibus magis patebit. — Sit fig. 1, *CD linea, quæ aliam lineam AB sub angulo dato ACD secat in puncto quodam C; proponatur ex puncto A ducere lineam AK ita ut, descripto ex centro A, radio AC, arcu CI, pars HI, inter lineam CD et arcum CI intercepta, datæ sit longitudinis* p? *Necesse non censeo hanc constructionem*

instituere, quæ admodum facilis est, sed qualiscunque sit illa constructio, nulla indiget demonstratione, eam locum posse habere, ubicunque sumatur punctum C; sed tum, si v. c. in puncto L sumatur punctum C, atque eadem instituatur constructio, erit non linea AK, sed alia Ak, linea quæsita (1). *Hinc sequitur, majorem minoremve esse angulum BAk quam angulum BAK; itidemque longiorem aut breviorem esse lineam Lh, lineá CH, prouti linea CD secat lineam AB in alio puncto. Nisi ergo datur puncti C situs, id est, sive AC sive BC, prorsus indeterminatus erit angulus BAK; sin autem insuper detur lineæ CH longitudo, perspicuum est, hoc casu angulo BAK determinatam magnitudinem posse assignari.*

Quodsi intelligamus, lineas AB, AK esse meredianos telluris, arcus CE, GH circulos parallelos, et lineam CH lineam loxodromicam, meridianum AB sub angulo loxodromico CAD dato secantem, idem ratiocinium subsistere poterit, et simili modo sequetur, tum demum differentiam longitudinis BAK fieri posse determinatam, cum non modo differentia latitudinum CG seu HI, et angulus loxodromicus ACD detur, sed insuper longitudo CH lineæ loxodromicæ, inter locos C et H interceptæ. Fieri hoc posse dico, quoniam uti suo loco ostendetur, etiamsi hæc dentur, quæstio tamen indeterminata manet, si tellus tanquam sphæra consideratur, quod tribuendum videtur peculiari proprietati sphæræ, quod in omnibus superficiei punctis eâdem curvaturâ gaudeat.

Hoc exemplo satis evidenter exposuisse credo, quid ipse de quæstionis indole judicaverim. Quæstionem propositam autem solutam

---

(1) Proprie, quum problema solvitur, duæ lineæ AK, AK; A*k*, A*k*, singulis vicibus inveniuntur, atque omnia puncta H, H, *h*, *h*, etc., ad eandem curvam lineam pertinent, quæ *hyperbola* est, cujus centrum erit punctum A; quodsi producatur arcus CI, donec lineam CD in alio puncto D secet, erunt AB', AB, ipsius *hyperbolæ* asymptoti, altera autem *hyperbolæ* pars sita erit in angulo opposito *b*A*b*'.

Ceterum tenendum est, me exemplo citato solummodo usum fuisse ad declarandum, quid hac de re cogitarem; neque ea, quæ ad hoc problema pertinent, de linea loxodromica dicta velim.

inveni a Leibnitzio (1) *et* Stone (2), *Mathematico Anglo. Hi supponunt cognitam esse latitudinem loci prioris, neque igitur usi sunt longitudine lineæ loxodromicæ, inter duos illos locos interceptâ. Eorum solutiones eodem recidunt, ac si quæstio ita fuisset proposita:* data duorum locorum differentia latitudinum crescentium (latitude croissante) et linea loxodromica (*id est*, angulo loxodromico) invenire differentiam longitudinis eorundem. *Namque ut innotescat differentia latitudinis crescentis duorum locorum, opus est latitudinis geographicæ utriusque loci cognitione.*

Et quia Leibnitzius *et* Stone *iisdem fere verbis quæstionem proposuerunt, ac nostra quæstio proposita est, in dubium incidi, quid ejus esset consilium. Quamobrem, vestræ sententiæ,* Viri Clarissimi! *prorsus non conscius, duplici modo quæstionis solutionem exhibui; primum quidem quid* Leibnitzius *et* Stone *fecerunt, protuli; tum ita quæstionem solvere conatus sum, ut de illa me judicasse supra exposui. At, etiamsi hanc meam solutionem quæstione requiri, certo scirem, tamen facere non poteram, quin primam solutionis rationem explicarem et exemplo illustrarem, quandoquidem ambæ arctissimo vinculo conjunctæ sint.*

Habetis, Viri Clarissimi! *ea quæ præmonenda erant, quibus præcipue indicavi, quomodo quæstionem percepi, quomodo eam soluturus sum. Vestro judicio patebit utrum recte egi, nec ne. Feci quod potui: quodsi eveniat, ut meum specimen, quamquam summa indulgentia illud excipiatis, præmio dignum non judicetur, nec oleum nec operam me perdidisse putabo.*

Quid tentasse nocet?

---

(1) Vid. *Acta eruditorum.* A° 1691. pag. 181.

(2) Invenitur hæc solutio in opere ejus, a quodam *Rondetio*, gallico sermone edito, quod inscribitur: *Analyse des infiniment petits, comprenant le calcul intégral, servant de suite aux infiniment petits de M. le marquis de L'Hôpital. Paris*, 1735.

CAPUT PRIMUM.

De Linea Loxodromica, ducta in Sphæroidis superficie, et tanquam linea curva duplicis curvaturæ considerata.

§ I.

LINEA loxodromica, quæ hoc loco significatur, talis est linea, quæ omnes ellipses meridianas, quæ in telluris superficie cogitari possunt, sub eodem angulo obliquo secat. Linea loxodromica itaque nihil aliud est, nisi cursus navis, quæ semper eodem venti rhombo mari procedit. Omnes circuli paralleli meridianos eodem quidem angulo secant, sed tamen inter loxodromicarum ordinem referri nequeunt, quoniam ille angulus rectus est ('ορτὸς); neque etiam, si navis quædam secundum meridianam ellipsin, atque igitur etiam semper versus eandem plagam cœli, vela daret, cursum sequeretur obliquum (λοξὸν); sed linea loxodromica tum demum a navi describitur, si, neque versus orientem aut occidentem, neque versus austrum aut boream dirigitur, sed medium inter hasce plagas cursum sequitur.

§ II.

Angulus ille constans vocatur angulus loxodromicus, estque ille angulus æqualis angulo rhombi; hic enim est angulus inter loxodromicam lineam et meridianam ellipsin (1).

(1) Vid. Delambre, *Astronomie théorique et pratique*, tom. III. chap. XXXVI. § 22. et seq.

§ III.

Sit *fig.* 2, P telluris polus, v. c. polus borealis; PC, PG, PH, PD meridiani, denique sit AB linea loxodromica; erunt omnes anguli PAB, PEB, etc. æquales; ponatur tellurem esse sphæram, dico figuras PAE, PEB, etc. non esse triangula sphærica. Etenim in triangulo sphærico hæc proprietas obtinet

$$\sin. PA : \sin. PE = \sin. PEA : \sin. PAE,$$

id est $\sin. PA : \sin. PE = \sin. PEF : \sin. PAE.$

Sed $\sin. PEF = \sin. PAE$; ergo $\sin. PA = \sin. PE$ sive $PA = PE$, quod absurdum est; hæc enim in triangulo sphærico occurrere nequeunt nisi anguli PAE et PEF sint recti. Quoniam igitur PAE, PEF, PFB triangula sphærica esse non possunt, neque etiam partes AE, EF, FB in eodem plano erunt sitæ, et quia idem ratiocinium verum est, quam propinqui sibi invicem sint meridiani circuli PC, PE, etc., ita propinqui cogitari saltem possunt, ut spatia AE, EF, nulla evadant, id est ut PA, PE, PF, etc. coincidant; spatia illa tum fiunt puncta mathematica, et hinc sequitur non ullum punctum lineæ loxodromicæ cum puncto, ut ita dicam, subsequente in eodem plano situm esse. Intelligatur planum OST, transiens per telluris centrum, tangere loxodromicam lineam in A; quoniam AB est linea curva duplicis curvaturæ, punctum quoddam E ab illo plano erit remotum, et quo magis a puncto A distet, eo quoque remotius erit ab illo plano. Quodsi OP minor evadat, partem quandam PAB sphæræ comprimi apertum est; sed puncta B, E, F, etc. magis tunc etiam a plano tangente deviare quisque videbit, et inde concludetur, hoc casu, quo tellus est sphæroïs, lineam loxodromicam, etiam esse curvam duplicis curvaturæ. Si ratio habeatur modi, quo hæc curva generatur, *a priori* judicari licet, ejusmodi eam esse, quæ magis magisque ad polum convergat, quo remotiora sint ejus puncta ab æquatore; et, si angulus loxodromicus satis sit magnus, tanquam spiralis gyros circum polum aget, et cum in directione contraria producitur, alicubi secabit æquatorem.

§ IV.

Lineæ curvæ duplicis curvaturæ proprietates vulgo indagantur ope

projectionum orthographicarum hujus lineæ, in duo plana quæcunque, sibi invicem perpendicularia. Hæ projectiones igitur sunt lineæ curvæ simplicis curvaturæ, quarum æquationes, quæ ex ratione, qua curva duplicis curvaturæ est generata, inveniri possunt, sufficiunt, ut omnes proprietates lineæ duplicis curvaturæ rite indagentur. Rationem hanc nunc sequemur, ad detegendas loxodromicæ lineæ proprietates.

§ V.

Sit YMY′ *Fig.* 3. planum meridiani elliptici, transiens per punctum ubi linea loxodromica secat æquatorem circulum MABDC. Sit porro YPY′ planum alius meridiani, atque P punctum lineæ loxodromicæ P*p*: rogetur itaque, si hæc linea projiciatur in planum æquatoris atque in planum meridiani YMY′, invenire æquationes harum projectionum, adhibitis ellipseos proprietatibus?

§ VI.

Primum ad projectionem horizontalem, quæ est in plano æquatoris, animum attendamus. Ducatur linea PE tangens ellipsin YPY′ in puncto P, sitque hæc linea sita in plano ejusdem ellipseos; sit E punctum ubi PE secat æquatoris planum, atque si ducatur OE, erit OQE projectio horizontalis hujus tangentis PE. Intelligatur alia linea PF, tangens lineam loxodromicam in P, quæ tangens sita erit in plano, quod tanget sphæroïdem in eodem puncto P. Planum hoc secabit æquatoris planum, secundum lineam EF; quæ linea, cum plana YPY′ et MABDC sint perpendicularia, cum linea OE constituet angulum rectum. Hinc si F est punctum ubi tangens PF secat lineam EF, erit triangulum PEF rectangulum ad E. Porro PQ perpendiculariter in OQ, ergo et perpendiculariter in planum æquatoris, ductâ, erit Q projectio horizontalis puncti P; et FQE projectio anguli FPE $= f\mathrm{P}p$; id est EQF est projectio anguli loxodromici. Si aQb est pars quædam projectionis lineæ loxodromicæ P*p*, erit QF, quæ est projectio tangentis PF, linea, tangens projectionem horizontalem loxodromicæ curvæ in Q, et cum OQ tanquam radius vector intelligi possit, erit FQE angulus radium vectorem inter atque

2

tangentem. Sit MO linea, a qua computantur coordinatæ centrales curvæ lineæ, et vocentur illæ coordinatæ u et ϕ, nimirum radius vector quidam OQ $= u$, et angulus quidam MOQ, seu potius arcus MA $= \phi$. — Sit, *Fig.* 4, curva projecta, Q punctum quoddam, OQ radius vector, QF tangens, erit valor differentialis tangentis anguli OQb,

$$Tang.\ OQb = u.\frac{d\phi}{du}\ (1),$$

ergo, quoniam *Tang.* OQb = — *Tang.* OQF,

$$Tang.\ OQF = -\ u.\frac{d\phi}{du}.$$

Si igitur, *Fig.* 3, ex ellipseos natura atque ex loxodromicæ generatione alium valorem invenire possumus ipsius *Tang.* OQF, qui pendet ab angulo ϕ seu a radio vectore u, obtinemus relationem inter radium vectorem et angulum ϕ eorumque differentiales, quæ relatio, erit æquatio differentialis projectionis horizontalis lineæ loxodromicæ.

§ VII.

Ponatur axis major OA ellipseos unitati cujusdam mensuræ æqualis; excentricitas $= e$; OQ erit abscissa $= u$, ergo

$$QE = Subtangenti = -\ \frac{1-u^2}{u},$$

$$QR = Subnormali = -\ u(1-e^2),$$

$$RE = RQ + EQ = -\left\{\frac{(1-u^2)+u^2(1-e^2)}{u}\right\} = -\ \frac{1-e^2u^2}{u};$$

porro in triangulis rectangulis RPE et QPE, quæ similia sunt, erit

$$PE^2 = RE \times EQ;\ \text{id est}\ PE = \pm\frac{1}{u}\sqrt{\{(1-e^2u^2)(1-u^2)\}}$$

cum angulus loxodromicus ubique constans sit, vocetur ejus tangens constans τ; habemus

$$EF = PE \times Tang.\ \text{anguli loxodromici} = \pm\frac{\tau}{u}\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}$$

(1) Conf. La Croix, *Traité élémentaire de calcul différentiel*, pag. 145. § 106. Deuxième édition. Paris, 1806.

et denique *Tang*. EQF $= \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{EQ}} = \frac{\pm \frac{\tau}{u} \sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}{-\frac{1-u^2}{u}} = \mp \tau . \sqrt{\frac{1-e^2u^2}{1-u^2}}$.

$$\text{Sed } Tang.\ \mathrm{EQF} = -\ Tang.\ \mathrm{OQF} = +\ u.\ \frac{d\phi}{du};$$

$$\text{ergo } u\frac{d\phi}{du} = \mp \tau \frac{\sqrt{(1-e^2u^2)}}{\sqrt{(1-u^2)}};$$

$$\text{sive } d\phi = \mp \tau\ du.\ \frac{\sqrt{(1-e^2u^2)}}{u\sqrt{(1-u^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hæc est æquatio differentialis projectionis horizontalis lineæ loxodromicæ. Signum — referendum est ad illam projectionem horizontalem, quæ tribuitur lineæ loxodromicæ in parte boreali sphæroïdis ductæ; signum + refertur ad projectionem horizontalem curvæ loxodromicæ in parte australi ductæ. Has duas projectiones perfecte æquales esse et sibi invicem oppositas, ex ipsa æquatione (1) intelligitur.

§ VIII.

Hac autem ratione æquatio differentialis (1) integra redditur.

$$d\phi = -\tau\frac{du}{u} \cdot \frac{\sqrt{(1-e^2u^2)}}{\sqrt{(1-u^2)}} = -\tau\, du\, \frac{1-e^2u^2}{u\sqrt{(1-u^2)(1-e^2u^2)}};$$

$$\phi = -\tau\int\frac{du - e^2u^2du}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} + \mathrm{C} = +\tau\int\frac{-du}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} + \int\frac{e^2u\, du}{\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} + \mathrm{C}.$$

Est autem

$$\int\frac{-du}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \int\frac{-du + du\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)} - du\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}$$

$$= \int\frac{du}{u} - \int\frac{du[1+\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}]}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = Log.\ Nep.\ (u) - \int\frac{du[1+\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}]}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}.$$

$$\text{Porro } -\int\frac{[1+\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}]\,du}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = -\int\frac{u(1-e^2)[1+\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}]\,du}{u^2(1-e^2)\sqrt{(1-u^2)(1-e^2u^2)}}.$$

$$\text{Sed} - (1-e^2)[1+\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}] = [\sqrt{(1-e^2u^2)}+\sqrt{(1-u^2)}].[e^2\sqrt{(1-u^2)}-\sqrt{(1-e^2u^2)}]$$

$$\text{et } u^2(1-e^2)\ldots\ldots = [\sqrt{(1-e^2u^2)}+\sqrt{(1-u^2)}].[\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}];$$

$$\text{ergo} - \int \frac{du[1+\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}]}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}$$

$$= \int \frac{u[\sqrt{(1-e^2u^2)}+\sqrt{(1-u^2)}].[e^2\sqrt{(1-u^2)}-\sqrt{(1-e^2u^2)}]\,du}{[\sqrt{(1-e^2u^2)}+\sqrt{(1-u^2)}][\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}].\sqrt{(1-e^2u^2)}.(1-u^2)}$$

$$= \int \frac{e^2u\,du\sqrt{(1-u^2)}-u\,du\sqrt{(1-e^2u^2)}}{\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}[\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}]} = -\int \frac{-\dfrac{e^2u\,du}{\sqrt{(1-e^2u^2)}}+\dfrac{u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}}}{\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}}$$

$$= -\int d.\,Log.\,Nep.\{\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}\} = -Log.\,Nep.\{\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}\}.$$

$$\text{Ergo } \tau\int \frac{-du}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \tau\,Log.\,Nep.\,(u) - \tau\,Log.\,Nep.\{\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}\}+C;$$

C est quantitas constans in omnibus curvæ punctis, qua integralis quæcunque perfecta redditur.

Hæc est prima pars integralis, æquationis differentialis:

$$\text{Restat} \int \frac{e^2u\,du}{\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \tfrac{1}{2}e\int \frac{2e\,u\,du}{\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \tfrac{1}{2}e\int \frac{2e(1-e^2)\,u\,du}{(1-e^2)\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}e\int 2e\frac{u\,du-e^2u\,du}{(1-e^2)\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \tfrac{1}{2}e\int 2e\frac{u\,du+e^2u^3\,du-e^2u\,du-e^2u^3\,du}{(1-e^2)\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}$$

$$= \tfrac{1}{2}e\int 2e\frac{u\,du(1-e^2u^2)-e^2u\,du(1-u^2)}{(1-e^2)\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \tfrac{1}{2}e\int 2e.\frac{\dfrac{u\,du\sqrt{(1-e^2u^2)}}{\sqrt{(1-u^2)}}-\dfrac{e^2u\,du\sqrt{(1-u^2)}}{\sqrt{(1-e^2u^2)}}}{(1-e^2)}$$

$$= \tfrac{1}{2}e\int 2e\frac{\sqrt{(1-u^2)}.\,d\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-e^2u^2)}.\,d.\sqrt{(1-u^2)}}{(1-e^2)}.$$

Sed $(1-e^2)=(1-e^2u^2)-e^2(1-u^2)=\{\sqrt{(1-e^2u^2)}\}^2-\{e\sqrt{(1-u^2)}\}^2$;

$$\text{ergo} \int \frac{e^2u\,du}{\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \tfrac{1}{2}e\int 2e\frac{\sqrt{(1-u^2)}\,d.\sqrt{(1-u^2e^2)}-\sqrt{(1-e^2u^2)}\,d.\sqrt{(1-u^2)}}{\sqrt{(1-e^2u^2)}^2-e^2\sqrt{(1-u^2)}^2}.$$

Sed cognita est functio $d.\ Log.\ Nep.\left\{\dfrac{x-ey}{x+ey}\right\} = 2e.\dfrac{ydx-ydy}{x^2-e^2y^2}$;

ergo si in hac functione pro x et y substituantur valores convenientes erit

$$\tau\int \frac{e^2u\,du}{\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}} = \tau.\tfrac{1}{2}e\,Log.\,Nep.\left\{\frac{\sqrt{(1-e^2u^2)}-e\sqrt{(1-u^2)}}{\sqrt{(1-e^2u^2)}+e\sqrt{(1-u^2)}}\right\}+C.$$

Huic functioni si addatur integralis inventa

$$\tau\int\frac{-du}{u\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}=\tau\ Log.\ Nep.\left\{\frac{u}{\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}}\right\}+C,$$

erit tandem,

$$\phi=\tau\ Log.\ Nep.\left\{\frac{u[\sqrt{(1-e^2u^2)}-e\sqrt{(1-u^2)}]^{\frac{e}{2}}}{[\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}].[\sqrt{(1-e^2u^2)}+e\sqrt{(1-u^2)}]^{\frac{e}{2}}}\right\}+C.$$

In puncto M, ubi curvæ origo, est $\phi=0$ et $u=1$, ergo in hoc puncto

$$0=\tau\ Log.\ Nep.\left\{\frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}}\right\}+C;\ \text{ergo}\ C=\tau\ Log.\ Nep.\ (\sqrt{(1-e^2)}).$$

Integer arcus ϕ, si functionis antecedentis nominator ac denominator multiplicentur per $\{\sqrt{(1-e^2u^2)}-e\sqrt{(1-u^2)}\}^{\frac{e}{2}}$, evadit

$$\phi=\tau\ Log.\ Nep.\left\{\frac{u\sqrt{(1-e^2)}^{1-e}\times\{\sqrt{(1-e^2u^2)}-e\sqrt{(1-u^2)}\}^{e}}{\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}}\right\}\ \ldots\ (2).$$

Atque hæc est æquatio projectionis horizontalis lineæ loxodromicæ ductæ in sphæroïdis superficie; qua ex æquatione patet lineam curvam esse transcendentem.

§ IX.

Si *e* evadat zero, sphæroïs mutatur in sphæram, et æquatio ejusdem projectionis erit

$$\phi=\tau\ Log.\ Nep.\left\{\frac{u.}{1-\sqrt{(1-u^2)}}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (3).$$

§ X.

Sit η basis systematis Logarithmorum Neperianorum, erit

$$Log.\ \eta=1,$$

ergo si proponatur talis functio

$\eta^k=z$, erit $k\ Log.\ \eta=Log.\ z$; id est $Log.\ z=k$.

Sic æquatio (2) mutatur vicissim in

$$\eta^{\frac{\phi}{\tau}}=\frac{u\sqrt{(1-e^2)}^{1-e}\times\{\sqrt{(1-e^2u^2)}-e\sqrt{(1-u^2)}\}^{e}}{\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}}.$$

Evolvatur hæc functio in seriem secundum Methodum Newtonianam,

$$u\{\sqrt{(1-e^2u^2)}-e\sqrt{(1-u^2)}\}^e=(1-e^2)^e.\,u+\tfrac{e^2}{2}(1-e^2)^{e-1}.(1-e^2)u^3+\tfrac{e^2}{8}(1-e^2)^{e-2}\times$$
$$\times\{(1-e^3)(1-e)+e(e-1)(1-e^2)^2\}\,u^5+\text{etc.}$$
$$\sqrt{(1-e^2u^2)}-\sqrt{(1-u^2)}=\tfrac{1}{2}(1-e^2)\,u^2+\tfrac{1}{8}(1-e^4)\,u^3+\text{etc.}$$

dividatur prior series per posteriorem, atque prodibit quotiens hujus formæ

$$\frac{a}{A.u}+\frac{b}{B}u+\frac{c}{C}u^2+\frac{d}{D}u^3+\text{etc.}$$

a, b, c, etc. A, B, etc. sunt quantitates constantes, quarum valores particulares cognoscere non opus est. Erit ergo

$$\eta^{\frac{\phi}{\tau}}=(1-e^2)^{\frac{1-e}{2}}\left\{\frac{a}{A.u}+\frac{b}{B}u+\frac{c}{C}u^2+\text{etc.}\right\}$$

ponatur $u=0$, erit $\frac{a}{Au}=\frac{a}{0}=\infty$, ergo hoc casu

$$\eta^{\frac{\phi}{\tau}}=\infty.\,(1-e^2)^{\frac{1-e}{2}}=\infty,$$

quod fieri nequit nisi sumatur $\phi=\infty$.

In sphæra idem locum habebit, sed facilius hoc patet. Nam æquatio (5)

$$\phi=\tau\ Log.\ Nep.\left\{\frac{u}{1-\sqrt{(1-u^2)}}\right\}$$

tranformatur in $\eta^{\frac{\phi}{\tau}}=\dfrac{u}{1-\sqrt{(1-u^2)}}$,

et posito $u=0$, erit $\eta^{\frac{\phi}{\tau}}=\infty$, ut supra.

Hinc concludere possumus, curvas, quæ tum in sphæroïde tum in sphæra sunt projectiones horizontales lineæ loxodromicæ, pertinere ad spiralium genus, quæ numquam per punctum O, *Fig.* 3, transire possunt, nisi per vices innumerabiles circum hoc punctum circumiissent. Itaque ejusmodi etiam sunt lineæ loxodromicæ, quæ circum telluris polum semper circumflectuntur, illum autem attingere non possunt, nisi post circumflexiones innumerabiles.

§ XI.

Postquam loxodromica linea per punctum M transierit, simili modo circum polum australem agitur, sed contraria directione ac circum polum borealem. Ergo projectio horizontalis lineæ loxodromicæ inde a polo boreali usque ad australem erit linea curva constans duabus partibus perfecte similibus atque sibi invicem oppositis. Vid. § VII et *Fig.* A, *Tab.* II.

§ XII.

Si opus esset curvam lineam, quam consideramus, ope æquationis (2) construere, in seriem eam æquationem evolvere magis conveniret; sed cum hoc valde esset molestum, melius est æquationem (1) iterum, sed alio modo, integrare.

$$d\phi = -\tau \frac{du}{u} . \sqrt{\left\{\frac{1-e^2u^2}{1-u^2}\right\}};$$

evolvatur $(1-e^2u^2)^{\frac{1}{2}}$ secundum *Newtoni* binomium in seriem, atque dividatur hæc series per u; sic habemus

$$d\phi = -\tau . du . \left\{\frac{1}{u\sqrt{(1-u^2)}} - \tfrac{1}{2}e^2 \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)}} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}e^4 \frac{u^3}{\sqrt{(1-u^2)}} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{2}e^6 \frac{u^5}{\sqrt{(1-u^2)}} - \text{etc.}\right\}$$

$$\text{sive } \phi = C - \tau\int\frac{du}{u\sqrt{(1-u^2)}} + \tfrac{1}{2}e^2\tau\int\frac{u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\tau e^4\int\frac{u^3\,du}{\sqrt{(1-u^2)}} + \text{etc.}$$

$$\text{Est autem } -\int\frac{du}{u\sqrt{(1-u^2)}} = -\,Log.\left\{\frac{1-\sqrt{(1-u^2)}}{u}\right\} = +\,Log.\,Nep.\left\{\frac{u}{1-\sqrt{(1-u^2)}}\right\},$$

$$\int\frac{u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}} = -\sqrt{(1-u^2)}\,;\ \int\frac{u^3\,du}{\sqrt{(1-u^2)}} = -\tfrac{1}{3}u^2\sqrt{(1-u^2)} - \tfrac{2}{3}\sqrt{(1-u^2)}\ \text{etc.}\ (*)$$

his omnibus substitutis, fiet

$$\phi = +\tau L.\,Nep.\left\{\frac{u}{1-\sqrt{(1-u^2)}}\right\} - \tau\sqrt{(1-u^2)}\left\{\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}e^4(1+\tfrac{1}{2}u^2) + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{5}e^6(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{5}u^2+\tfrac{1}{2}u^4) + \text{etc}\right\}$$

Nam C hoc casu nullum habet valorem.

(*) Vid. celeb. La Croix opere citato: *Calcul intégral*, § 173 et seq.

Hæc series saltem aptior est, quam æquatio (2). Nam, cum e et u unitate sint minores, multis non opus est terminis ad valorem quendam ipsius ϕ calculandum, convenientem cum quodam dato valore u.

Terminus primus hujus seriei est æquatio projectionis horizontalis lineæ loxodromicæ in sphæræ superficie ductæ, (vid. æquat. (3)); et cum termino secundo terminus primus minuendus sit, si linea loxodromica in sphæroïde ducta est, patet, eodem valore u arcum ϕ in globo majorem fore quam in sphæroïde. Ceterum, cum mox constructionem approximativam lineæ loxodromicæ exhibiturus sim, non opus esse censeo in hac re diutius morari, quod nullius esset utilitatis.

§ XIII.

Inventa itaque æquatione projectionis horizontalis invenire possumus hujus projectionis *subtangentes*, *subnormales*, *radios curvaturæ*, reliquaque, quæ omnibus curvis sint propria; sic v. c. longitudinem cujusvis partis invenire possumus ope formulæ

$$d.\,l = \sqrt{(du^2 + u^2 d\phi^2)} \;.\;.\;.\;.\;. \; (*)$$

id est $d.\,l = \sqrt{\left(du^2 + \tau^2 \dfrac{(1-e^2u^2)}{(1-u^2)}\,du^2\right)} = du.\,\dfrac{\sqrt{(1+\tau^2-(1+e^2)u^2)}}{\sqrt{(1-u^2)}}.$

Sed $1+\tau^2 =$ secantis anguli loxodromici quadrato, pone $= \sigma^2$

$$\text{ergo } d.\,l = du\sqrt{\left\{\frac{\sigma^2-(1+e^2)u^2}{1-u^2}\right\}} = \sigma.\,du\sqrt{\left\{\frac{1-\dfrac{1+e^2}{\sigma^2}.\,u^2}{(1-u^2)}\right\}} = \sigma.\,du.\sqrt{\left\{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}\right\}}.$$

Igitur *longitudo curvæ lineæ proportionalis est longitudini ellipseos* (**) *cujus axis major æqualis est axi majori meridiani elliptici, et cujus excentricitas* k *æqualis est* $= \sqrt{\left(\dfrac{1+e^2}{\sigma^2}\right)}$.

Nunc autem transeamus ad considerationem projectionis verticalis.

(*) Vid. LA CROIX opere citato, pag. 145. § 105.
(**) Eodem opere, *Calcul intégral*, § 180.

§ XIV.

Si *Fig.* 3. ex puncto P demittatur PS perpendicularis in planum YMY′, quod transit per punctum M, ubi loxodromica linea secat æquatorem, erit S projectio verticalis puncti P. Porro cum QF sita sit in plano æquatoris, si ducatur FU perpendicularis in lineam OM ac conjungantur puncta S et U, erit SU projectio verticalis lineæ PF, quæ tangit loxodromicam lineam in P; hæc linea igitur tangit projectionem verticalem in S; igitur ducto radio vectore SO, erit OSU angulus inter radium illum et tangentem SU, cujus anguli valor determinetur.

$$EF = \pm \frac{\tau}{u}\sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)} \;..(\text{vid. § VII}) \;..... \; EQ = -\frac{1-u^2}{u};$$

$$Tang.\, EQF = \frac{EF}{EQ} = \mp \tau \sqrt{\left(\frac{1-e^2u^2}{1-u^2}\right)};$$

hinc invenitur $cos.\, EQF = \frac{\sqrt{(1-u^2)}}{\sqrt{\{(1-u^2)+\tau^2(1-e^2u^2)\}}}$; $sin.\, EQF = \frac{\tau\sqrt{(1-e^2u^2)}}{\sqrt{\{(1-u^2)+\tau^2(1-e^2u^2)\}}}$.

U′Q sit parallela OU, et propter QT, U′U, perpendiculares in OT, erit QU′ = TU, angulus U′QE = UOQ = ϕ, ang. U′QF = ϕ — EQF, ergo $cos.\, U'QF = cos.\, (\phi - EQF) = cos.\, \phi.\, cos.\, EQF + sin.\, \phi.\, sin.\, EQF = ...$

$$........ \pm \frac{cos.\, \phi \sqrt{(1-u^2)} + \tau\, sin.\, \phi \sqrt{(1-e^2u^2)}}{\sqrt{\{(1-u^2)+\tau^2(1-e^2u^2).\}}};$$

$$U'Q = FQ.\, cos.\, U'QF = \frac{1}{u}\, cos.\, \phi.\, (1-u^2) + \frac{\tau}{u}\, sin.\, \phi.\, \sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}.$$

Ponatur PQ = TS = z, eritque

$$Tang.\, U'PQ = Tang.\, UST = \pm \frac{1}{z.u}.\, (1-u^2)\, cos.\, \phi \pm \frac{\tau}{zu}\, sin.\, \phi \sqrt{(1-u^2)(1-e^2u^2)};$$

$$TO = OQ\; cos.\, UOQ = u\; cos.\, \phi; \quad Tang.\, TSO = \frac{u\, cos.\, \phi}{z}.$$

Porro si radius vector OS vocetur ρ et angulus MOS, ψ, erit

$$Tang.\, OSU = \rho.\, \frac{d.\psi}{d.\rho} = Tang.\{UST + TSO\} = \frac{Tang.\, UST + Tang.\, TSO}{1 - Tang.\, UST.\, Tang.\, TSO}$$

$$= \frac{z \cos.\phi + z\,\tau \sin.\phi \sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}{z^2u - u(1-u^2)\cos.^2\phi - \tau u \sin.\phi \cos.\phi \sqrt{(1-e^2u^2)(1-u^2)}}.$$

Ex ellipseos proprietate datur

$$u^2 = \frac{1}{1-e^2}.\,[(1-e^2)-z^2];$$

sed $z = \mathrm{ST} = \rho \sin.\psi$; ergo $u^2 = \frac{1-e^2-\rho^2\sin.^2\phi}{1-e^2}$; $u = \sqrt{\left\{\frac{1-e^2-\rho^2\sin^2\psi}{1-e^2}\right\}}$.

Porro est $\mathrm{OT} = \rho \cos.\psi = u \cos.\phi$, et inde invenitur

$$\cos.\phi = \frac{\rho \cos.\psi}{u} = \frac{\rho \cos.\psi \sqrt{(1-e^2)}}{\sqrt{\{(1-e^2)-\rho^2\sin.^2\psi\}}};$$

$$\sin.\phi = \sqrt{(1-\cos^2\phi)} = \sqrt{\left\{\frac{(1-e^2)-\rho^2(1-e^2\cos.^2\psi)}{(1-e^2)-\rho^2\sin.^2\psi}\right\}};$$

atque si hæc omnia in præcedenti formula (*Tang.* OSU = etc.) substituantur, prodibit hæc æquatio

$$\rho.\frac{d\psi}{d\rho} = \frac{\tau \sin.\psi \sqrt{\{(1-e^2)^2+e^2\rho^2\sin.^2\psi\}}.\{(1-\rho^2)(1-e^2)-e^2\rho^2\sin.^2\psi\} + \cos.\psi\sqrt{(1-e^2)^3}}{\sin.\psi\{(1-\rho^2)(1-e^2)-e^2\rho^2\sin^2\psi\{\sqrt{(1-e^2)}-\tau\cos.\psi\sqrt{\{(1-e^2)^2+e^2\rho^2\sin^2\psi\}}\}\{(1-\rho^2)(1-e^2)-e^2\rho^2\sin.^2\psi\}} \;..(4).$$

Hæc est æquatio differentialis projectionis verticalis lineæ loxodromicæ, quæ magis implicata est, quam ut methodis cognitis integretur. Coordinatis rectangularibus usus sum, ut alio modo ad æquationem pervenirem; adhibui trigonometriam sphæricam, cujus ope valorem *Tang.* OSU obtinui; sed diversis hisce methodis, ad æquationem formâ simpliciorem et tractatu aptiorem non adductus sum. Quod fieri aliter non posse arbitror, quandoquidem, si tellus fuerit sphæra, æquatio (4) fieret:

$$\rho.\frac{d\psi}{d.\rho} = \frac{\cos.\psi + \tau \sin.\psi \sqrt{(1-\rho^2)}}{(1-\rho^2)\sin\psi - \tau \cos.\psi \sqrt{(1-\rho^2)}}$$

quæ integrationi minime apta est.

§ XV.

Itaque de projectionis verticalis natura, ex æquatione (4) nil scire possumus. At æquatio

$$\rho \cos.\psi = u \cos.\phi = OT. \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

modo allata, si conjungatur cum æquatione (2) projectionis horizontalis, omnino hæ duæ æquationes sufficiunt ad ipsius loxodromicæ proprietates detegendas.

§ XVI.

Ex natura loxodromicæ lineæ, quæ numquam polum poterit attingere, perspicere licet, lineam curvam, quæ est verticalis projectio, et quæ representatur *Fig.* C. *Tab.* II., numquam attingere posse polos neque peripheriam meridiani YMY'. Curva illa est formæ serpentinæ, constatque duabus partibus æqualibus sibi oppositis, quarum una in parte boreali, altera in parte australi sita est.

§ XVII.

Æquatio differentialis horizontalis projectionis sufficit ad longitudinem cujusvis arcus loxodromici determinandam. Est enim in systemate coordinatarum rectangularium, si l significet longitudinem arcus illius, x, y et z cujusvis puncti coordinatas:

$$dl. = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

sed quoniam, in systemate centralium coordinatarum (uti vidimus § XIII)

$$dx^2 + dy^2 = u^2 d\phi^2 + du^2,$$

erit . . . . $d.l = \sqrt{(u^2 d\phi^2 + du^2 + dz^2)}$;

est autem . . $z = (1-e^2)\sqrt{(1-u^2)}$,

ergo $d.z = \dfrac{(e^2-1)\,u\,du}{\sqrt{(1-u^2)}}$ et $dz^2 = \dfrac{(1-e^2)^2\,u^2 du^2}{(1-u^2)}$.

Igitur . . . . . . $dl = \sqrt{\left(u^2 d\phi^2 + du^2 + \dfrac{(1-e^2)^2\,u^2}{1-u^2}.\,du^2\right)}$.

Ex æquatione differentiali (1) nimirum ex $d\phi = -\tau \dfrac{du}{u}\sqrt{\left\{\dfrac{1-e^2u^2}{1-u^2}\right\}}$

sequitur . . . . $u^2 d\phi^2 = \tau^2 \left\{\dfrac{(1-e^2u^2)}{1-u^2}\right\} du^2$,

$$\text{ergo } dl = \sqrt{\left\{du^2 + \frac{\tau^2(1-e^2u^2)}{1-u^2}\, du^2 + \frac{(1-e^2)\,u^2}{1-u^2}.\, du^2\right\}}$$

$$= d.u. \sqrt{\left\{\frac{1-u^2+\tau^2(1-e^2u^2)+(1-e^2)u^2}{1-u^2}\right\}}$$

$$= du \sqrt{\left\{\frac{1+\tau^2-(2+\tau^2)\,e^2u^2+e^4u^4}{1-u^2}\right\}};$$

et cum $1+\tau^2=\sigma^2$, (Vid. § XIII.)

$$dl = du.\, \frac{\sqrt{\{\sigma^2-e^2[1+\sigma^2-e^2]\,u^2\}}}{\sqrt{(1-u^2)}} = \sigma.\, du. \sqrt{\left\{\frac{1-\frac{e^2}{\sigma^2}[1+\sigma^2-e^2)u^2}{(1-u^2)}\right\}},$$

ac tandem, si ponatur $\frac{e^2}{\sigma^2}[1-e^2+\sigma^2]=h^2$, erit

$$d.\, l = \sigma.\, du\, \frac{\sqrt{(1-h^2u^2)}}{\sqrt{(1-u^2)}}. \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

Ergo statuere possumus, longitudinem lineæ loxodromicæ proportionalem esse longitudini ellipseos, cujus axis major æqualis est diametro æquatoris, et excentricitas $h=\frac{e}{\sigma}\sqrt{\{1-e^2+\sigma^2\}}$.

Si autem longitudo lineæ loxodromicæ sumatur ab æquatore usque ad polum, integrari oportet ab $u=1$ usque ad $u=0$; sed tum etiam ellipseos longitudo integratur ab $u=1$ ad $u=0$; sed hac postrema integratione obtinemus quartam partem peripheriæ ellipseos; ergo si hæc quarta vocetur E, erit longitudo integra L lineæ loxodromicæ ab æquatore ad polum

$$L = \sigma.\, E.$$

Igitur *hæc integra longitudo æqualis erit hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus basis quartæ parti peripheriæ dictæ ellipseos, et angulus basin inter et hypotenusam, angulo loxodromico æqualis est.*

§ XVIII.

In globo erit $dl = \sigma.\, \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)}}$

igitur $l = \sigma$ *arc. sin.* $(u) + c$

si $l = 0$ erit $u = 1$; ergo *arc. sin.*$(u) =$ *arc. sin.* $1 = 90° = 360° + 90 = 2.360° + 90°$ etc. $= n\pi + \frac{1}{2}\pi = (n + \frac{1}{2})\pi$. Id est

$$0 = \sigma(n + \tfrac{1}{2}\pi) + c \text{ et } c = -\sigma(n + \tfrac{1}{2})\pi.$$

Ergo $l = -\sigma(n + \frac{1}{2})\pi + \sigma$ *arc. sin.* (u) . . . . (7).

Si hæc longitudo sumatur ab $u = 1$, usque ad $u = 0$, erit, quia

arc. sin. $(0) = 180° = 360° + 180° = n\pi + \frac{1}{2}\pi = (n + \frac{1}{2})\pi$,

(Nam, quamquam *arc. sin.* (0) non modo $= 180°$ sed etiam $= 0$ esse potest, tamen nostro casu, 0 esse nequit, quoniam terminus secundus tunc evanescit.)

$$l = -\sigma(n + \tfrac{1}{2})\pi + \sigma(n + \tfrac{1}{2})\pi = \sigma . \tfrac{1}{2}\pi :$$

Igitur in sphæra *longitudo integra lineæ loxodromicæ æqualis est hypotenusæ trianguli rectanguli, cujus basis æqualis est quadranti meridiani, et angulus inter basin et hypotenusam æqualis est angulo loxodromico.*

Sequeretur et hæc proprietas ex proprietate, in § antecedente indicata. Nam quoniam illa est generalis proprietas, et de omni ellipse valet, subsistat etiam necesse est, si excentricitas evanescit.

§ XIX.

Igitur *Fig.* 2. si quædam pars AB lineæ loxodromicæ spectetur in telluris sphæricæ superficie, erit etiam AB $= \sigma$.BL. Igitur figura ABL trianguli rectanguli proprietates habet, ita ut, si *Fig.* 5, *b l* æqualis est longitudini arcus BL, *a l* itidem æqualis arcui AL, *a b* sit æqualis longitudini lineæ loxodromicæ inter puncta A et B interceptæ, et *a b l* $=$ *b a p* sit angulus loxodromicus. Hæc est proprietas mirifica lineæ loxodromicæ in globi superficie ductæ, eaque est causa, cur omnia fere problemata Astronomiæ Nauticæ quam facillime solvantur.

§ XX.

Ope æquationum (1) et (5) aliæ etiam quæstiones possunt resolvi, veluti cujusnam longitudinis erunt *radii oscillatorii* (*rayons oscillateurs*)

etc.: sed hæc omnia attingere non possum, quippe nimis a scopo deviarem, et hæ proprietates ceteroquin nullius sunt utilitatis.

§ XXI.

Hæ considerationes analyticæ lineæ loxodromicæ sufficiunt ad ea paranda, quæ ad quæstionis propositæ solutionem desiderantur, eaque exponere nunc incipiam.

CAPUT SECUNDUM.

Expositio eorum, quæ ad quæstionis solutionem conducunt.

§ XXII.

In hoc capite secundo mihi proposui, invenire longitudinem geographicam et longitudinem lineæ loxodromicæ in functione anguli loxodromici et latitudinis loci dati. Planum YMY′ *Fig.* 3. secat æquatorem MABD in eodem puncto M ac linea loxodromica. Longitudo geographica loci cujusdam, ab unoquoque meridiano computari potest; ergo nil impedit, quominus illa longitudo incipiat a puncto M: sic si P est locus in telluris superficie, arcus MA erit hujus puncti longitudo: hæc longitudo igitur eadem est ac arcus, quem capite antecedenti nuncupavi ϕ. Ergo si invenire possumus u in functione ipsius latitudinis loci P, atque si hæc functio substituatur loco u in æquatione (2) § 8, obtinemus ϕ in functione latitudinis, et anguli loxodromici, neque aliud tum requiritur, nisi illum arcum, (cujus longitudo tantummodo determinata est,) gradibus exprimere.

§ XXIII.

PR, *Fig.* 3, est normalis puncti P; ergo angulus PRE erit latitudo loci illius, quod ex geographia satis constat.

In triangulo rectangulo PQE est

$$PQ = QE.\ Tang.\ QEP, \text{ id est } z = -\frac{1-u^2}{u}.\ Tang.\ QEP;$$

hinc, ob $z^2 = (1-e^2)(1-u^2)$, $Tang.^2 QEP = \frac{u^2(1-e^2)}{(1-u^2)}$; et $cos.^2 QEP = \frac{1-u^2}{1-e^2u^2}$,

sed cum triangulum RPE sit rectangulum, erit $cos.$ QEP = sin QRP; vocetur ergo latitudo loci P, λ, erit

$$sin.^2\lambda = \frac{1-u^2}{1-e^2u^2}$$

quare $u^2 = \frac{cos^2\lambda}{1-e^2 sin^2\lambda}$ .... et $u = \frac{cos.\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda}}$:

hæc substitui debent in æquatione (2), sed melius erit substitutionem instituere in functione (1) § 7, atque denovo illam integrare. Ergo

$$d\phi = -\tau.\frac{du}{u}\sqrt{\left(\frac{1-e^2u^2}{1-u^2}\right)} = -\tau.\frac{du}{u}.\frac{1}{sin.\lambda},$$

$$du = -\frac{(1-e^2 sin.^2\lambda)-e^2 cos.^2\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda)^3}} sin.\lambda.\ d\lambda$$

$$d\phi = -\tau\frac{du}{u}.\frac{1}{sin.\lambda} = \tau.\frac{(1-e^2 sin.^2\lambda)-e^2 cos.^2\lambda)}{(1-e^2 sin.^2\lambda).\ cos.\lambda}d.\lambda = \tau\frac{d\lambda}{cos.\lambda} - \tau\frac{e^2 cos.\lambda\ d.\lambda}{(1-e^2 sin.^2\lambda)}.$$

Terminus primus locum habet in globi superficie, nam eo casu fit $d.\phi = +\tau.\frac{d\lambda}{cos.\lambda}$. Habemus igitur

$$\phi = \tau\int\frac{d\lambda}{cos.\lambda} - \tau\int\frac{e^2 cos.^2\lambda\, d\lambda}{1-e^2 sin.^2\lambda} + C$$

$$\tau\int\frac{d\lambda}{cos.\lambda} = \tau\int\frac{d\lambda}{sin.(90^\circ-\lambda)} = \tau\int\frac{d\lambda}{2sin.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)cos.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)} = \tau\int\frac{\frac{1}{2}d\lambda\, cos.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)}{sin.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)cos.^2(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)}$$

$$= \tau\int\frac{\frac{1}{2}d\lambda}{cos.^2(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)}.\frac{1}{Tang.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)} = \tau\int\frac{\frac{\frac{1}{2}d\lambda}{cos.^2(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)}}{Tang.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)} = \tau\int\frac{-d.\ Tang.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)}{Tang.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda)}.$$

$$\text{Ergo } \tau\int\frac{d\lambda}{cos.\lambda} = -\tau\, Log.Nep.(Tang.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)) = \tau\, Log.Nep.\{-Tang.(45^\circ - \tfrac{1}{2}\lambda)\}$$

$$\text{sed } - Tang.(90^\circ - \lambda) = + Tang.(90^\circ + \lambda).$$

$$\text{Ergo } - Tang.\tfrac{1}{2}(90^\circ - \lambda) = + Tang.\tfrac{1}{2}(90^\circ + \lambda).$$

$$\text{Igitur } \tau\int\frac{d\lambda}{cos.\lambda} = \tau\ Log.\ Nep.\ Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda);$$

$$\text{deinde } \tau\int\frac{e^2 cos.\lambda d\lambda}{1 - e^2 sin^2\lambda} = \tau\int\frac{e.\,d.\,e\,sin.\,\lambda}{1 - e^2 sin^2\lambda} = \tau\int\frac{\dfrac{ed.\,e\,sin.\,\lambda}{1 - e\,sin.\,\lambda}}{1 + e\,sin.\,\lambda}$$

$$= \tau\int\frac{\dfrac{e.\,d.\,e\,sin.\,\lambda}{(1 - e\,sin.\,\lambda)^2}}{\dfrac{1 + e\,sin.\,\lambda}{1 - e\,sin.\,\lambda}} = \tfrac{1}{2}e\tau\int\frac{d.\dfrac{1 + e\,sin.\lambda}{1 - e\,sin.\,\lambda}}{\dfrac{1 + e\,sin.\lambda}{1 - e\,sin.\,\lambda}} = \tfrac{1}{2}e\tau\int d.\,Log.Nep.\left\{\frac{1 + e\,sin.\lambda}{1 - e\,sin.\lambda}\right\}$$

$$\text{Igitur } \tau\int\frac{e^2 cos.\lambda\, d\lambda}{1 - e^2 sin.^2\lambda} = \tau.\,\tfrac{1}{2}\,e.\ Log.\ Nep.\left\{\frac{1 + e\,sin.\,\lambda}{1 - e\,sin.\,\lambda}\right\} + C$$

$$\text{et } \phi = \tau\left\{Log.Nep.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - \tfrac{1}{2}e\,Log.Nep.\left\{\frac{1 + e\,sin.\lambda}{1 - e\,sin.\lambda}\right\}\right\} + C$$

$$\text{sive } \phi = \tau.\ Log.\ Nep.\left\{Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda).\left(\frac{1 - e\,sin.\,\lambda}{1 + e\,sin.\lambda}\right)^{\frac{e}{2}}\right\} \ldots\ldots (8)$$

Nam C nullum habet valorem, quoniam simulac $\phi = 0$, etiam $\lambda = 0$.

In sphæra erit . . . . . $\phi = \tau\, Log.Nep.Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)$. . . . (9).

§ XXIV.

Priusquam ulterius progrediar paucis exponere oportet quid sit *latitudo crescens*.

Sint *Fig*. 3. YPA, YHB duo meridiani, qui angulum quemcunque inter se constituunt, hicce angulus æque bene arcu AB, quam arcu PH mensuratur, id est arcus AB æquatoris et arcus PH circuli paralleli eundem graduum numerum continent. At hi arcus longitudine eo magis differunt, quo major est latitudo puncti P: est autem

Radius æquatoris: radium paralleli = arcus AB: *arcum* PH: vocetur arcus æquatoris AB, α; arcus PH, β erit, ob OA = 1 et PG = radio paralleli = u,

$$1 : u = \alpha : \beta,\ \text{ergo } \beta = \alpha.\ u.$$

Porro arcus meridiani elliptici, qui est $1''$, sine sensibili errore æqualis est differentiali longitudinis ellipseos:

$$\text{id est} = du\sqrt{\frac{(1-e^2u^2)}{1-u^2}} = \frac{(1-e^2)d\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda)^3}} = \alpha',$$

si arcus æquatoris sumatur $1''$ erit arcus paralleli

$$\beta = 1''.\, u = 1''\frac{cos\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda)}}$$

igitur

$$\beta : \alpha' = 1''\frac{cos\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda)}} : \frac{(1-e^2)d\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda)^3}} \ldots\ldots (x)$$

Si telluris quædam pars, aliquo modo, in chartam projiciatur, meridiani atque circuli paralleli in genere erunt lineæ curvæ, quarum ope, uti notum est, longitudines atque latitudines locorum mensurantur: si insuper in hisce chartis lineæ loxodromicæ delineantur, erunt hæ etiam lineæ curvæ; ergo nautis tales chartæ inservire non possunt ad vias, navigatione confectas, metiendas, quippe hæ viæ non lineis rectis sed curvis lineis in chartis sunt propositæ.

Si meridiani atque paralleli fuerint rectæ lineæ parallelæ inter se, esset etiam linea loxodromica, recta linea: sed si hoc modo chartæ construantur, quoniam gradus longitudinis iidem sunt ac gradus latitudinis, ejusdem longitudinis erunt gradus parallelorum atque æquatoris gradus, cum eos diminui oporteret in proportione $\beta = \alpha' u = \alpha'.\frac{cos\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda)}}$.

Igitur cum gradus omnium parallelorum iidem essent ac gradus æquatoris, etiam haberetur hæc proportio:

$$\beta : \alpha' = 1'' : \frac{(1-e^2)d\lambda}{\sqrt{(1-e^2 sin^2\lambda)^3}};$$

ex proportione (x) sequitur

$$\beta : \alpha' = 1'' : \frac{d\lambda(1-e^2)}{cos\lambda.(1-e^2 sin^2\lambda)};$$

ergo cum proportio posterior priori sit major, usui non accurate inservirent tales chartæ, in quibus gradus omnium parallelorum iidem essent ac gradus meridianorum et æquatoris. Si autem parallelorum gradus omnes sint æquales, atque æquales æquatoris gradibus sumantur, tum

meridianorum gradus fiant inæquales, atque crescant in proportione

$\frac{(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)}$ necesse est; eo etenim modo proportio (x) erit

$$\beta : \alpha' = 1'' : \frac{(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)},$$

qua ratione relatio inter gradus longitudinis et latitudinis eadem manet, ac ea, quæ proportione (x) indicatur. Quoniam sic gradus meridiani majores semper fiunt, quam gradus æquatoris, sive gradus longitudinis, eam ob causam *latitudines* in talibus chartis *crescere* dicuntur. Erit igitur:

Arcus quidam meridiani = *latitudini crescenti* $= \int \alpha' = \int \frac{(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)};$

invenimus autem $\Phi = \tau \int \frac{(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)}$.

Ergo $\Phi = \tau \times$ *latitudinem crescentem* puncti P.

§ XXV.

Ceteroquin cum demonstraverimus, lineam loxodromicam proponi posse lineâ rectâ, si meridiani atque paralleli rectæ sunt, dummodo meridianorum gradus crescant, æquatio postrema ex rei natura evidens est. Sit enim, *Fig.* 6. A B C D talis charta (quam Galli vocant *carte réduite*,) A*a* *ab*, *bc* sunt gradus æquatoris, æquales gradibus *di*, *ik*, *kl* paralleli ad latitudinem λ siti, erunt latitudines A*d*, *d*B, etc. crescentes. Si navis proficiscatur a loco A ad locum F, qui λ gradus ab æquatore sit remotus, erit AF linea loxodromica, *d*AF = AFG = angulo loxodromico, ergo erit AG = longitudini loci F = GF. *Tang.* AFG, id est *æqualis latitudini crescenti, multiplicatæ per anguli loxodromici tangentem.*

§ XXVI.

Formula (8) § 23 transformari potest in seriem

$$\Phi = \tau \left\{ L.N.\ Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - [e^2 \sin.\lambda + \tfrac{1}{3} e^4 \sin.^3\lambda + \tfrac{1}{5} e^6 \sin.^5\lambda + \text{etc.}] \right\} (*) \ldots (10)$$

(*) Vid. cl. *Delambre*, astronomie théorique et pratique, tom. III. chap. XXXVI. § 120. *Not.* Compendio scriptionis *L. N.* exprimitur *Logarithmus Neperianus.*

qua serie confirmatur quod, § 12 supra, dictum est, nimirum si latitudines duæ tum in sphæra tum in sphæroïde æquales cogitantur, longitudinem, quæ ope ejusdem lineæ loxodromicæ (id est, quæ in utraque superficie sub eodem angulo ducta est,) invenitur, in sphærâ majorem fore quam in sphæroïde.

Æquatio (9) etiam sic proponitur

$$\Phi = \tau \left\{ sin.\lambda + \tfrac{1}{3}\, sin.^3\lambda + \tfrac{1}{5}\, sin.^5\lambda + \text{etc.}\ldots\ldots \right\} \ldots\ldots (^*)$$

ergo series (10) evadit

$$\Phi = \tau \left\{ (1-e^2) sin.\lambda + \tfrac{1}{3}(1-e^4)\, sin.^3\lambda + \tfrac{1}{5}(1-e^6)\, sin.^5\lambda + \text{etc.}\ldots \right\} \ldots\ldots (11)$$

sed melius erit uti serie (10), quoniam series (11) minus est convergens.

Vocetur α differentia axium (*applattissement*), erit nostro casu, ubi æquatoris diameter unitati est æquale, $\alpha = 1 - \sqrt{(1-e^2)}$, ergo

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 1 - e^2 \text{ et } e^2 = 2\alpha - \alpha^2$$
$$e^4 = 4\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4$$
$$e^6 = 8\alpha^3 - 12\alpha^4 + 6\alpha^5 - \alpha^6$$
etc.

hæc si in serie (10) loco e^2, e^4, e^6 substituantur, erit

$$\Phi = \tau . \left\{ Log.\,Nep.\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - (2\alpha - \alpha^2) sin.\lambda - \tfrac{1}{3}(4\alpha^2 - 4\alpha^3 + \alpha^4) . sin.^3\lambda - \tfrac{1}{5}(8\alpha^3 - 12\alpha^4 + 6\alpha^5 - \alpha^6)\, sin.^5\lambda - \text{etc.}\ldots \right\}$$

est autem

$$sin.^3\lambda = \tfrac{3}{4}\, sin.\lambda - \tfrac{1}{4}\, sin.3\lambda$$
$$sin.^5\lambda = \tfrac{5}{8}\, sin.\lambda - \tfrac{5}{16}\, sin.3\lambda + \tfrac{1}{16}\, sin.5\lambda$$
etc.

$$\text{Ergo } \Phi = \tau \left\{ Log.\,Nep.\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - (2\alpha - \tfrac{5}{4}\alpha^4 - \tfrac{3}{4}\alpha^5 - \tfrac{1}{8}\alpha^6)\, sin.\lambda - (\tfrac{1}{3}\alpha^2 + \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{2}{3}\alpha^4 + \tfrac{3}{8}\alpha^5 - \tfrac{1}{16}\alpha^6)\, sin.3\lambda - \tfrac{1}{80}(8\alpha^3 - 12\alpha^4 + 6\alpha^5 - \alpha^6) sin.5\lambda \text{ etc.} \right\} (12).$$

Si uti velimus logarithmis vulgaribus, dividendus erit .... *Log. Tang.* $(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)$ per modulum sive per $\frac{1}{Log.\,Nep.\,(10)}$; id est per $\frac{1}{2{,}30258\,50929\,94} = 0{,}42429448190{,}3$. Porro ut Φ innotescat minutis se-

(*) Vid. *Delambre*, opere et loco citato, § 118. — Etiam conferri merentur *Bezout*, cours de mathématique, tom. IV. § 226 et seq. — *Wolff*, elementa mathematica, tom. IV. atque illic § 336. elementorum hydrographiæ. — *Montucla*, histoire des mathématiques, tom. I. livre VII. pag. 614. — Ubi etiam occurrit formula (3), § 3. capitis antecedentis tradita.

cundis, dividenda erit omnis formula (12) per $sin. 1'' = \ldots\ldots\ldots$ 0,00000 48481 37. Sic fiet

$$\Phi = \frac{\tau}{sin. 1''} \Big\{ 2{,}30258\,50929\,94 . L. Tang. (45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - (2\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha^4 - \tfrac{3}{4}\alpha^5 - \tfrac{1}{8}\alpha^6) sin. \lambda$$

$$- (\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{2}{3}\alpha^4 + \tfrac{3}{8}\alpha^5 - \tfrac{1}{12}\alpha^6) sin. 3\lambda - \tfrac{1}{80}(8\alpha^3 - 12\alpha^4 + 6\alpha^5 - \alpha^6) sin. 5\lambda \text{ etc.} \Big\} \quad (13).$$

Si tellus foret sphæra, esset

$$\Phi = \frac{\tau}{sin. 1''} . \, 2{,}30258\,50929\,94 . Log. Tang. (45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)$$

sive $Log. \Phi = Log. \tau + Log. (Log. Tang. (45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)) + 5{,}6765407 \ldots (14).$

§ XXVII.

Si statuamus differentiam axium esse $\frac{1}{334}$ erit

$$\alpha = 0{,}00299\,40119\,76$$
$$\alpha^2 = 0{,}00000\,89641\,08$$
$$\alpha^3 = 0{,}00000\,00268\,39$$
$$\alpha^4 = 0{,}00000\,00000\,81$$

α^5 et α^6 sine errore omitti possunt: invenitur dein

$$2\alpha - \tfrac{1}{4}\alpha^4 = 0{,}00598\,80238\,51$$
$$\tfrac{1}{3}\alpha^2 - \tfrac{1}{3}\alpha^3 - \tfrac{2}{3}\alpha^4 = 0{,}00000\,29790\,35$$
$$\tfrac{1}{80}(8\alpha^3 - 12\alpha^4) = 0{,}00000\,00026\,72.$$

Igitur $\Phi = \frac{\tau}{sin. 1''} \Big\{ 2{,}30258\,5092994\, L. Tang. (45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - 0{,}00598\,80238\,51\, sin. \lambda$

$$- 0{,}00000\,29790\,35\, sin. 3\lambda - 0{,}00000\,00026\,72\, sin. 5\lambda - \text{etc.} \Big\} \ldots (15).$$

Quæ series usui quam maxime est adaptata, cum non pluribus, quam tribus, terminis opus erit, ad longitudinem accuratissime calculandam.

Transeamus nunc ad secundam partem hujus capitis.

§ XXVIII.

Invenimus § 17 capitis antecedentis

$$d. l. = \sigma\, du \frac{\sqrt{(1 - h^2 u^2)}}{\sqrt{(1 - u^2)}};$$

hæc longitudo computata est *Fig.* 3. a puncto P ad punctum *p*: sed

eo casu *Fig.* 4. si pQ infinite parva, utpote differentialis ipsius u habeatur, cum OP minor sit quam OQ, u decrescit; ergo du negativa sumi oportet. Igitur

$$d.\,l = -\,\sigma\,du\sqrt{\frac{(1-h^2u^2)}{(1-u^2)}}.$$

Cum $h^2 = \frac{e^2}{\sigma^2}(1-e^2+\sigma^2)$; $u^2 = \frac{\cos.^2\lambda}{1-e^2\sin.^2\lambda}$ et $du. = -\frac{(1-e^2\sin.^2\lambda)-e^2\cos.^2\lambda}{\sqrt{(1-e^2\sin.^2\lambda)^3}}\sin.\lambda\,d\lambda$

si horum valorum substitutio instituatur, fiet

$$d.\,l = (1-e^2)\,d.\,\lambda\sqrt{\left\{\frac{\sigma^2-e^2\cos.^2\lambda}{(1-e^2\sin.^2\lambda)^3}\right\}},$$

sive $d.\,l = \sigma(1-e^2)d\lambda.\ \frac{\sqrt{(1-\frac{e^2}{\sigma^2}\cos.^2\lambda)}}{\sqrt{(1-e^2\sin.^2\lambda)^3}} = \sigma(1-e^2)d\lambda(1-\frac{e^2}{\sigma^2}\cos.^2\lambda)^{\frac12}(1-e^2\sin.^2\lambda)^{-\frac32}.$

Ope Newtoniani binomii habemus

$$(1-\frac{e^2}{\sigma^2}\cos.^2\lambda)^{\frac12}(1-e^2\sin.^2\lambda)^{-\frac32} = 1-\tfrac12\frac{e^2}{\sigma^2}\cos.^2\lambda-\tfrac12.\tfrac14.\frac{e^4}{\sigma^4}\cos.^4\lambda-\tfrac12.\tfrac14.\frac{e^6}{\sigma^6}\cos.^6\lambda-\tfrac14.\tfrac14.\tfrac78\frac{e^8}{\sigma^8}\cos.^8\lambda$$

$$\ldots-\tfrac32.\tfrac14e^2\sin.^2\lambda+\tfrac12.\tfrac34\frac{e^4}{\sigma^2}\sin.^2\lambda\cos.^2\lambda+\tfrac12.\tfrac14.\tfrac32\frac{e^6}{\sigma^4}\sin.^2\lambda\cos.^4\lambda+\tfrac12.\tfrac18.\tfrac32.\frac{e^8}{\sigma^6}\sin.^2\lambda\cos.^6\lambda$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots+\tfrac32.\tfrac54e^4\sin.^4\lambda-\tfrac12.\tfrac32.\tfrac54.\frac{e^6}{\sigma^2}\sin.^4\lambda\cos.^2\lambda-\tfrac12.\tfrac14.\tfrac32.\tfrac54.\frac{e^8}{\sigma^4}\sin.^4\lambda\cos.^4\lambda$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\tfrac32.\tfrac54.\tfrac76e^6\sin.^6\lambda+\tfrac12.\tfrac32.\tfrac54.\tfrac76\frac{e^8}{\sigma^2}\sin.^6\lambda\cos.^2\lambda$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\tfrac32.\tfrac54.\tfrac76.\tfrac98\,e^8\sin.^8\lambda$$

— etc.

Et cum . . . . . $\sin.^2\lambda = 1-\cos^2.\lambda$

$\sin.^4\lambda = 1-2\cos.^2\lambda+\cos.^4\lambda$

$\sin.^6\lambda = 1-3\cos.^2\lambda+3\cos.^4\lambda-\cos.^6\lambda$

$\sin.^8\lambda = 1-4\cos.^2\lambda+6\cos.^4\lambda-4\cos.^6\lambda+\cos.^8\lambda$

prodibit, omnibus reductis, hæc series.

$$d\lambda = \sigma.\ d\lambda.\ (1-e^2)\times$$

$\times\{[1-\tfrac32e^2+\tfrac32.\tfrac54e^4-\tfrac32.\tfrac54.\tfrac76e^6+\text{etc.}]+\tfrac32e^2[1-2.\tfrac54e^2+3.\tfrac54.\tfrac76e^4-\text{etc.}]\cos.^2\lambda-\tfrac12\frac{e^2}{\sigma^2}[1-\tfrac32e^2+\tfrac32.\tfrac54.e^4$
$-\tfrac32.\tfrac54.\tfrac76e^6+\text{etc.}]\cos.^2\lambda+\tfrac32.\tfrac54e^4[1-3.\tfrac76e^2+6.\tfrac76.\tfrac98e^4-10.\tfrac76.\tfrac98.\tfrac{11}{10}e^6\text{etc.}]\cos.^4\lambda-\tfrac12.\tfrac32.\frac{e^4}{\sigma^2}$
$[1-2.\tfrac54e^2+3.\tfrac54.\tfrac76e^4-\text{etc.}]\cos.^4\lambda-\tfrac12.\tfrac14.\frac{e^4}{\sigma^4}[1-\tfrac32e^2+\tfrac32.\tfrac54e^4-\text{etc.}]\cos.^4\lambda+\tfrac32.\tfrac54.\tfrac76e^6[1-4\tfrac92e^2$

$+ 10 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{11}{10} e^4 - \text{etc.}] \cos.^6\lambda - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{e^6}{\sigma^2} [1 - 3 \cdot \frac{7}{6} e^2 + 6 \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} e^4 - \text{etc.}] \cos.^6\lambda + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{e^6}{\sigma^4} [1 - 2 \cdot \frac{5}{4} e^2$
$+ 3 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} e^4] \cos.^6\lambda - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{e^6}{\sigma^6} [1 - \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} e^4 - \text{etc.}] \cos.^6\lambda + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} e^8 [1 - 5 \cdot \frac{11}{10} e^2 + \text{etc.}] \cos.^8\lambda$
$- \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \frac{e^8}{\sigma^2} [1 - 4 \cdot \frac{9}{8} e^2 + \text{etc.}] \cos.^8\lambda - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \frac{e^8}{\sigma^4} [1 - 3 \cdot \frac{7}{6} e^2 + \text{etc.}] \cos.^8\lambda - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \frac{e^8}{\sigma^6}$
$[1 - 2 \cdot \frac{5}{4} e^2 + \text{etc.}] \cos.^8\lambda - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} \frac{e^8}{\sigma^8} [1 - \frac{3}{2} e^2 + \text{etc.}] \cos.^8\lambda + \text{etc.} \ldots\ldots \}$

Pone
$$1 - \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} e^4 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} e^6 + \text{etc.} = 1 - a$$
$$1 - 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot e^2 + 3 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} e^4 - 4 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} e^6 + \text{etc.} = b$$
$$1 - 3 \cdot \frac{7}{6} \cdot e^2 + 6 \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{9}{8} e^4 - \text{etc.} \ldots\ldots = c$$
$$1 - 4 \cdot \frac{9}{8} \cdot e^2 + 10 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{11}{10} e^4 - \text{etc.} \ldots\ldots = d$$
$$1 - 5 \cdot \frac{11}{10} e^2 + \text{etc.} \ldots\ldots = f.$$

Tum igitur erit....... $d.\, l = \sigma (1 - e^2).\, d\lambda. \times$

$$\times \Big\{ (1-a) + [\tfrac{3}{2} e^2.b. - \tfrac{1}{2} \tfrac{e^2}{\sigma^2} (1-a)] \cos.^2\lambda + [\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} e^4 c. - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{e^4}{\sigma^2} b - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{e^4}{\sigma^4} (1-a)] \cos^4\lambda$$
$$+ [\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{6} e^6 d. - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \tfrac{e^6}{\sigma^2} c + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{e^6}{\sigma^4} b - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{e^6}{\sigma^6} (1-a)] \cos.^6\lambda + [\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{9}{8} e^8 f$$
$$- \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{7}{6} \cdot \tfrac{e^8}{\sigma^2} d - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{5}{4} \cdot \tfrac{e^8}{\sigma^4} c - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{e^8}{\sigma^6} b - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{7}{8} \cdot \tfrac{e^8}{\sigma^8} (1-a)] \cos.^8\lambda + \text{etc.} \Big\}$$

Invenimus autem... § 26. $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$, et hinc invenitur.

$$e^2 = 0,00597\ 90598\ 44$$
$$e^4 = 0,00003\ 57491\ 57$$
$$e^6 = 0,00000\ 02137\ 40$$
$$e^8 = 0,00000\ 00012\ 96$$
$$e^{10} = 0,00000\ 00000\ 07$$

Ergo $1 - a = 1 - 0,00890\ 20183\ 76 = 0,99109\ 79816\ 24.$

$\frac{3}{2} \cdot e^2.b. = 0,00883\ 58868\ 61$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{\sigma^2}(1-a) = 0,00275\ 84149\ 16 \frac{1}{\sigma^2}$;

$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot e^4.c. = 0,00006\ 56814\ 47$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{e^4}{\sigma^2} b = 0,00002\ 74129\ 64. \frac{1}{\sigma^2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{e^4}{\sigma^4}(1-a)$
$= 0,00000\ 43894\ 02. \frac{1}{\sigma^4}.$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} e^6.d. = 0,00000\ 04300\ 68$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{e^6}{\sigma^2}.\ c. = 0,00000\ 01914\ 19. \frac{1}{\sigma^2}$;

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{e^6}{\sigma^4}.b. = 0,00000\ 00782\ 08 \frac{1}{\sigma^4}$; $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{e^6}{\sigma^6}(1-a) = 0,00000\ 00264\ 76 \frac{1}{\sigma^6}.$ —

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}e^8.f. = 0,\ 00000\ 00094\ 83$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{e^8}{\sigma^2}.\ d. = 0,\ 00000\ 00042\ 21\frac{1}{\sigma^2}$; $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{e^8}{\sigma^4}\ c$ $= 0,\ 00000\ 00009\ 06\frac{1}{\sigma^4}$; $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{e^8}{\sigma^6} = 0,\ 00000\ 00001\ 20.\ \frac{1}{\sigma^6}$; $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{e^8}{\sigma^8}(1-a) = 0,\ 00000\ 00000\ 70\frac{1}{\sigma^8}$.

Si autem ponatur

$$d.\ l = \sigma.(1-e^2)\,d.\lambda.\left\{(1-a) + A\cos.^2\lambda + B\cos.^4\lambda + C\cos.^6\lambda + D\cos.^8\lambda + \text{etc.}\right\}$$

erit

$(1-a) = 0,\ 99109\ 79816\ 24.$

$A = 0,\ 00883\ 58868\ 61 - 0,\ 00275\ 84149\ 16\frac{1}{\sigma^2}.$

$B = 0,\ 00006\ 56814\ 47 - 0,\ 00002\ 74129\ 64\ \frac{1}{\sigma^2} - 0,\ 00000\ 43894\ 02\ \frac{1}{\sigma^4}.$

$C = 0,\ 00000\ 04300\ 68 - 0,\ 00000\ 01914\ 19.\frac{1}{\sigma^2} + 0,\ 00000\ 00782\ 08\frac{1}{\sigma^4} - 0,\ 00000\ 00264\ 76\ \frac{1}{\sigma^6}.$

$D = 0,\ 00000\ 00094\ 83 - 0,\ 00000\ 00042\ 21.\frac{1}{\sigma^2} - 0,\ 00000\ 00009\ 06\ \frac{1}{\sigma^4} - 0,\ 00000\ 00001\ 20\ \frac{1}{\sigma^6}.$

Ad coefficientem D etiam pertinet hicce terminus, $0,\ 00000\ 00000\ 70\frac{1}{\sigma^8}$, sed quoniam σ unitate major, ideoque σ^8 unitate multo major est, sine errore illum terminum possumus omittere. Hi coefficientes in eadem linea loxodromica constantes sunt.

Restat nobis, seriem

$$d.\ l = \sigma(1-e^2)\left\{(1-a)d.\lambda + A\cos.^2\lambda.d.\lambda + B\cos.^4\lambda.\,d.\lambda + C\cos.^6\lambda.\,d.\lambda + D\cos.^8\lambda.\,d.\lambda + \text{etc.}\right\}$$

integram reddere.

Ponatur $\cos.\lambda = x$, erit $\sin.\lambda = \sqrt{(1-x^2)}$; $dx = -\,d\lambda\,\sin.\lambda$; $d\lambda = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$; ergo

$$d.l = \sigma(1-e^2)\left\{-(1-a)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - Ax^2\frac{dx.}{\sqrt{(1-x^2)}}.x^2 - Bx^4\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - Cx^6\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - Dx^8\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right\}$$

$$l = \sigma(1-e^2)\left\{-(1-a)\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - A\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - B\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - C\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - D\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\right\} + \Gamma$$

Est autem (*)

$$-\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\ Arc.\ sin.(x),$$

(*) Vid. *La Croix*, Traité du Calcul Intégral, § 173.

$$-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=+\tfrac{1}{2}x\sqrt{(1-x^2)}-\tfrac{1}{2}\,Arc.sin.x\;,$$

$$-\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=+\tfrac{1}{4}x^3\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}+\sqrt{(1-x^2)}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\,Arc.sin.(x)\,,$$

$$-\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=+\tfrac{1}{6}x^5\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^3\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x\sqrt{(1-x^2)}-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\,Arc.sin.(x)\,,$$

$$-\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=+\tfrac{1}{8}x^7\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{7}{8}x^5\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}x^3\sqrt{(1-x^2)}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot x\sqrt{(1-x^2)}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}\,Arc.sin.(x)\,,$$

$$Arc.sin.(x)=Arc.sin.\{cos.\lambda\}=90^\circ-\lambda.$$

Si igitur, loco x, x^3 etc., $\sqrt{(1-x^2)}$, $Arc.sin.(x)$, substituamus $cos.\lambda$, $cos.^3\lambda$ etc. $sin.\lambda$; $(90^\circ-\lambda)$, atque si omnes integrales functiones in serie præcedenti rite colligantur, obtinemus tandem hanc seriem

$$l=\sigma(1-c^2).\Big\{-\big[(1-a)+\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}B+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}C+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}D\big](90^\circ-\lambda)+\big[\tfrac{1}{2}A+$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}B+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}C+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}D\big]sin.\lambda\,cos.\lambda+\big[\tfrac{1}{4}B+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{6}C+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{8}D\big].$$
$$sin.\lambda\,cos.^5\lambda+\big[\tfrac{1}{6}C+\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{7}{8}D\big]sin.\lambda\,cos.^5\lambda+\tfrac{1}{8}D\,sin.\lambda\,cos.^7\lambda+\text{etc.}\Big\}+\Gamma$$

sive

$$l=\sigma(1-e^2)\big\{-(1-P)(90^\circ-\lambda)+Q.sin.\lambda\,cos.\lambda+R.sin.\lambda\,cos.^3\lambda+S.sin.\lambda\,cos.^5\lambda+T\,sin.\lambda\,cos.^7\lambda\big\}+\Gamma$$

Calculo autem patet, coefficientes P, Q, R, S, T, sequentes habere valores.

$$1-P=0{,}99554\,39530\,75-0{,}00138\,03022\,45\frac{1}{\sigma^2}-0{,}00000\,16192\,18\frac{1}{\sigma^4}-1{,}00000\,00088\,03\frac{1}{\sigma^6}\,,$$

$$Q=0{,}00444\,59514\,51-0{,}00138\,03022\,45\frac{1}{\sigma^2}-0{,}00000\,16192\,18\frac{1}{\sigma^4}-0{,}00000\,00088\,03\frac{1}{\sigma^6}\,,$$

$$R=0{,}00001\,65116\,81-0{,}00000\,68938\,89\frac{1}{\sigma^2}-0{,}00000\,10812\,25\frac{1}{\sigma^4}-0{,}00000\,00055\,36\frac{1}{\sigma^6}\,,$$

$$S=0{,}00000\,00730\,56-0{,}00000\,00325\,18\frac{1}{\sigma^2}+0{,}00000\,00128\,86\frac{1}{\sigma^4}-0{,}00000\,00044\,30\frac{1}{\sigma^6}\,,$$

$$T=0{,}00000\,00011\,82-0{,}00000\,00005\,28\frac{1}{\sigma^2}-0{,}00000\,00001\,13\frac{1}{\sigma^4}-0{,}00000\,00000\,15\frac{1}{\sigma^6}.$$

In origine, id est *Fig.* 3. in puncto M, est $l=0$, itemque $\lambda=0$, ergo series erit in hoc curvæ loco:

$$0=\sigma(1-e^2)\,[-(1-P).\,90]+\Gamma.$$

Igitur quantitas constans $\Gamma=\sigma(1-e^2)(1-P)\,90^\circ$.

hoc valore substituto fiet tandem

$l=\sigma(1-e^2)\{(1-P)\lambda+Q.sin.\lambda cos.\lambda+R.sin.\lambda cos.^3\lambda+S.sin.\lambda cos.^5\lambda+T sin.\lambda cos.^7\lambda+\text{etc.}\}$..(14)

si e fiat $=0$, sphærois mutatur in sphæram;

tum etiam P, Q, R, S, T, fiunt nullæ; namque hi coefficientes, uti e superioribus videre licet, oriuntur ex additione potestatum ipsius e: et hoc casu

$$l=\sigma.\,\lambda.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(15)$$

quod convenit cum formula (7) vid. § 18 et imprimis § 19. (cap. antec.)

§ XXIX.

Series (14) in aliam, usui magis idoneam, ita transformatur.

$sin.\lambda.\,cos.\lambda=\frac{1}{2}sin.2\lambda$

$sin.\lambda.\,cos.^3\lambda=sin.\lambda.\,cos.\lambda.\,cos.^2\lambda=\frac{1}{2}sin.2\lambda.\frac{1}{2}(1+cos.2\lambda)=\frac{1}{4}sin.2\lambda cos.2\lambda+\frac{1}{4}sin.2\lambda$
$=\frac{1}{4}sin.2\lambda+\frac{1}{8}sin.4.\lambda$ —

$sin.\lambda.\,cos.^5\lambda=sin.\lambda.\,cos.\lambda.\,cos.^4\lambda=\frac{1}{2}sin.2\lambda.\frac{1}{8}(3+4cos.2\lambda+cos.4\lambda)=\frac{3}{16}sin.2\lambda+\frac{1}{8}sin.4\lambda$
$+\frac{1}{16}sin.2\lambda cos.4\lambda=\frac{3}{16}sin.2\lambda+\frac{1}{8}sin.4\lambda+\frac{1}{32}sin.6\lambda-\frac{1}{32}sin.2\lambda$
$=\frac{5}{32}sin.2\lambda+\frac{1}{8}sin.4\lambda+\frac{1}{32}sin.6.\lambda.$ —

$sin.\lambda.\,cos.^7\lambda=sin.\lambda.\,cos.\lambda.\,cos.^6\lambda=\frac{1}{2}sin.2\lambda.\frac{1}{32}(10+15cos.2\lambda+6cos.4\lambda+cos.6\lambda)=$
$\frac{5}{32}sin.2\lambda+\frac{15}{128}sin.4\lambda+\frac{3}{32}cos.4\lambda.\,sin.2\lambda+\frac{1}{64}sin.2\lambda.$
$cos.6\lambda=\frac{5}{32}sin.2\lambda+\frac{15}{128}sin.4\lambda+\frac{3}{64}sin.6\lambda-\frac{3}{64}sin.2\lambda$
$+\frac{1}{128}sin.8\lambda-\frac{1}{128}sin.4\lambda=\frac{7}{64}sin.2\lambda+\frac{7}{64}sin.4\lambda$
$+\frac{3}{64}sin.6\lambda+\frac{1}{128}sin.8\lambda.$ —

Ergo $l=\sigma(1-e^2)\{(1-P)\lambda+\frac{1}{2}Q\,sin.2\lambda.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$
$+\frac{1}{4}R\,sin.2\lambda+\frac{1}{8}R\,sin.4\lambda\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$
$+\frac{5}{32}S\,sin.2\lambda+\frac{1}{8}S\,sin.4\lambda+\frac{1}{32}S\,sin.6\lambda.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$
$+\frac{7}{64}T\,sin.2\lambda+\frac{7}{64}T\,sin.4\lambda+\frac{3}{64}T\,sin.6\lambda+\frac{1}{128}T\,sin.8\lambda.\}$

$l=\sigma(1-e^2)\{(1-P)\lambda+E sin.2\lambda+F sin.4\lambda+G sin.6\lambda+H sin.8\lambda.\}$

Est autem

$E=0,00222\,71151\,89-0,00069\,18797\,32\frac{1}{\sigma^2}-0,00000\,10779\,15\frac{1}{\sigma^4}-0,00000\,00064\,80\frac{1}{\sigma^6},$

$F=0,00000\,20732\,20-0,00000\,08658\,59.\frac{1}{\sigma^2}-0,00000\,01335\,52\frac{1}{\sigma^4}-0,00000\,00012\,47\frac{1}{\sigma^6},$

$G=0,00000\,00023\,58-0,00000\,00010\,42\frac{1}{\sigma^2}-0,00000\,00003\,98\frac{1}{\sigma^4}-1,00000\,00001\,40\frac{1}{\sigma^6},$

$$H = 0{,}00000\,00000\,09 - 0{,}00000\,00000\,04\,\frac{1}{\sigma^2} - 0{,}00000\,00000\,00\,\frac{1}{\sigma^4} - 0{,}00000\,00000\,00\,\frac{1}{\sigma^6}.$$

Multiplicentur coefficientes $(1-P)$, Q etc. per $(1-e^2) = 0{,}99402\,09401\,56$, tum prodibunt:

$$K = 0{,}99068\,49393\,56 - 0{,}00137\,19493\,30\,\frac{1}{\sigma^2} - 0{,}00000\,16095\,36\,\frac{1}{\sigma^4} - 0{,}00000\,00087\,50\,\frac{1}{\sigma^6},$$

$$L = 0{,}00221\,37991\,34 - 0{,}00068\,77429\,41\,\frac{1}{\sigma^2} - 0{,}00000\,10714\,70\,\frac{1}{\sigma^4} - 0{,}00000\,00064\,41\,\frac{1}{\sigma^6},$$

$$M = 0{,}00000\,20608\,24 - 0{,}00000\,08606\,82\,\frac{1}{\sigma^2} - 0{,}00000\,01327\,54\,\frac{1}{\sigma^4} - 0{,}00000\,00012\,38\,\frac{1}{\sigma^6},$$

$$N = 0{,}00000\,00023\,24 - 0{,}00000\,00010\,34\,\frac{1}{\sigma^2} - 0{,}00000\,00003\,95\,\frac{1}{\sigma^4} - 0{,}00000\,00001\,39\,\frac{1}{\sigma^6}.$$

Terminus $H\,(1-e^2)$ omitti potest.

Erit igitur series, qua longitudo quædam lineæ loxodromicæ, a puncto ubi secat æquatorem, ad locum, cujus latitudo est λ, inveniri potest, hujus simplicis formæ:

$$l = \sigma\{K\lambda + L\,sin.2\lambda + M\,sin.4\lambda + N\,sin.6\lambda\} \ldots\ldots\ldots (16)$$

§ XXX.

Hac igitur serie, si detur latitudo alicujus loci et angulus loxodromicus, inveniri potest iter a nave inde ab æquatore ad illum locum confectum. Sed cum axim æquatoris unitati æqualem posuerimus, ut innotescat via confecta *milliaribus*, multiplicanda erit series antecedens per numerum milliarium, radio æquatoris contentum.

Est autem *Log. radii æquatoris*, metris (gall. mètres) expressus

$$Log.\ r = 6{,}8045306 \ldots.\ (*)$$

$$\text{Ergo } r = 6375737{,}30 \text{ metris.}$$

Sive $r = 6375{,}73730$ *milliaribus* (*gall. kilométres*, *lieues*). *Milliaribus* igitur, sive *kilometris*, innotescet iter, si calculo subjiciamus hanc formulam seu seriem

$$l = 6375{,}73730\,.\,\sigma.\{K.\lambda + L.sin.2\lambda + M.sin.4\lambda + N.sin.6\lambda\} \ldots (16')$$

(*) Vid. *Base du système métrique*, par *Mechain* et *Delambre*, tom. III. pag. 196. — Ubi axis æquatoris vocatur *m*.

CAPUT TERTIUM.

Solutio Quœstionis Propositœ.

§ XXXI.

Præmissis igitur iis, quæ ad quæstionis propositæ solutionem conducunt, ipsam solutionem, quemadmodum fieri posse mihi visum est, nunc exponere incipiam: et cum duplici modo me eam intellexisse præmonuerim, absolvetur hoc caput partibus duabus, quibus continentur duæ quæstionis solutiones.

§ XXXII.

Quæstio prima hujusmodi est: *data duorum locorum differentia latitudinis (crescentis,) et linea loxodromica, invenire differentiam longitudinis eorundem?*

§ XXXIII.

Si verbis, data linea loxodromica, concipiamus, datum iri angulum loxodromicum, cognoscamus utriusque loci latitudinem necesse est: nam sine eo differentia latitudinis sive sit crescens sive non, in omnibus sphæroïdis superficiei punctis dari potest, et differentia longitudinis indeterminata manet. Sit igitur λ latitudo prioris loci, λ' latitudo loci alterius, ita ut sit λ' major quam λ; erit longitudo ϕ prioris loci, inde a puncto ubi secat linea loxodromica æquatorem,

$$\phi = \frac{\tau}{sin.1''} \Big\{ 2,30258\,50929\,94\, Log.\,Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) - 0,00598\,80238\,51\, sin.\lambda - 0,00000\,29790\,55\, sin.3\lambda - 0,00000\,00026\,72\, sin.5\lambda - \text{etc.} \Big\}$$

(vid. form. (13) § 27 supra.)

Sic etiam alterius loci longitudo erit

$$\phi' = \frac{\tau}{sin.1''}\Big\{2,30258\,50929\,94\,Log.\,Tang.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda') - 0,00598\,80238\,51\,sin.\lambda' - 0,00000\,29790\,35\,sin.3\lambda' - 0,00000\,00026\,72\,sin.5\lambda' - \text{etc.}\Big\}$$

Hæ series duobus factoribus (*gall. facteurs*) constant, quorum alteri exhibent latitudines crescentes dictorum locorum (vid. § 25 supra in fine). Deducatur prima series a secunda, fietque:

$$\phi' - \phi = \frac{\tau}{sin.1''}\Big\{2,30258\,50929\,94\,Log.\,[Tang.\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda') : Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda)] - 0,00598\,80238\,51\,(sin.\lambda' - sin.\lambda) - 0,00000\,29790\,35\,(sin.3\lambda' - sin.3\lambda) - 0,00000\,00026\,72\,(sin.5\lambda' - sin.5\lambda) - \text{etc.}\Big\} \;\ldots\ldots\ldots\; (17).$$

$\phi' - \phi$ est differentia longitudinis duorum locorum, id est angulus inter meridianos, per illos locos transeuntes: et factor secundus, ipsius seriei, est differentia latitudinum crescentium. In sphæra erit

$$\phi' - \phi = \frac{\tau}{sin.1''}\Big\{2,30258\,50929\,94\,Log.\left[\frac{Tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda')}{Tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)}\right]\Big\} \quad (18)$$

§ XXXIV.

Si differentia latitudinis crescentis in sphæroïde vocetur, D in sphæra *d*, erit:

$$1^\circ. \ldots\ldots\ldots \phi' - \phi = \tau.D : sin.1'',$$
$$2^\circ. \ldots\ldots\ldots \phi' - \phi = \tau.d : sin.1''.$$

Igitur. . . . . $1^\circ . . . 1 : \tau = D : \phi' - \phi.\ sin1''$,
$2^\circ . . . 1 : \tau = d : \phi' - \phi.\ sin.1''$.

et cum radium unitati æqualem fecerimus, inde, tum in sphæroïde tum in sphærâ, hæc emanat regula, in navigationis theoria maximæ utilitatis: radius est ad tangentem anguli loxodromici in eadem ratione, ac differentia latitudinis crescentis ad differentiam longitudinis (*).

§ XXXV.

Sin.p — *sin.q* = 2*sin.*$\frac{1}{2}(p-q)$ *sin.*$\frac{1}{2}(p+q)$; ergo si hoc applicetur ad seriem (17) modo inventam, habemus hanc seriem, magis idoneam:

(*) Vid. *Bézout*, *cours de navigation*, § 66 et seq. Paris, an IX de la républ.

$$\phi'-\phi=\frac{r}{sin.1''}\Big\{2{,}30258\;50929\;94\;Log.\left[\frac{Tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\lambda')}{Tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\lambda)}\right]-0{,}01197\;60477\;02\;sin.\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda).$$
$$cos.\tfrac{1}{2}(\lambda'+\lambda)-0{,}00000\;59580\;70\;sin.\tfrac{3}{2}(\lambda'-\lambda)\;cos.\tfrac{3}{2}(\lambda'+\lambda)-0{,}00000\;00053\;44.$$
$$sin.\tfrac{5}{2}(\lambda'-\lambda)\;cos.\tfrac{5}{2}(\lambda'+\lambda)\ldots\ldots\Big\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(19)$$

Si alter locorum in australi telluris parte situs sit, uti in *Fig.* 7, ejus latitudo respectu alterius loci latitudinis erit negativa: v. c. situs sit locus, cujus latitudo est λ in hæmisphæro australi, eritque

$$\phi'-\phi=\frac{r}{sin.1''}\Big\{2{,}30258\;50929\;94\;Log.\left[\frac{Tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\lambda')}{Tang.(45^\circ-\frac{1}{2}\lambda')}\right]-0{,}01197\;60477\;02\;sin.\tfrac{1}{2}(\lambda'+\lambda).$$
$$cos.\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda)-0{,}00000\;59580\;70\;sin.\tfrac{3}{2}(\lambda'+\lambda)\;cos.\tfrac{3}{2}(\lambda'-\lambda)-0{,}00000\;00053\;44.$$
$$sin.\tfrac{5}{2}(\lambda'+\lambda)\;cos.\tfrac{5}{2}(\lambda'-\lambda)\ldots\ldots\Big\}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(20)$$

§ XXXVI.

Exemplo sequenti rem illustrabo:

Rogetur invenire differentiam longitudinis duorum locorum, quorum latitudines sint $\lambda = 33^\circ\;14'\;10''$; $\lambda' = 40^\circ\;56'\;8''$, *et per quos transit linea loxodromica, cujus angulus loxodromicus* $= 65^\circ$.

$45^\circ+\frac{1}{2}\lambda' = 65^\circ\;28'\;4''$; $\lambda'-\lambda = 7^\circ\;41'\;58''$;
$45^\circ+\frac{1}{2}\lambda = 61^\circ\;37'\;5''$; $\lambda'+\lambda = 74^\circ\;10'\;18''$;
$\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = 3^\circ\;50'\;59''$; $\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda) = 37^\circ\;5'\;9''$;
$\frac{3}{2}(\lambda'-\lambda) = 8^\circ\;32'\;57''$; $\frac{3}{2}(\lambda'+\lambda) = 111^\circ\;15'\;27''$;
$\frac{5}{2}(\lambda'-\lambda) = 19^\circ\;14'\;55''$; $\frac{5}{2}(\lambda'+\lambda) = 185^\circ\;25'\;45''$.

$L.s.\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = L.sin.\,3^\circ\;50'\;59'' = 8{,}8269799$
$L.c.\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda) = L.cos.\,37^\circ\;5'\;9'' = 9{,}9018576$
Log. 0,01197 60477 02.... = 8,0783155 (-10)

Log. hujus producti = 6,8071510 (-10)
Numerus = + 0,00064 1431000.

$L.s.\frac{3}{2}(\lambda'-\lambda) = L.sin.\,8^\circ\;32'\;57'' = 9{,}1721884$
$L.s.\frac{3}{2}(\lambda'+\lambda) = L.cos.\,111^\circ\;15'\;27'' = 9{,}5593800$ (-)
Log. 0,00000 59580 70.... = 4,7751055 (-10)

Log. producti ..... = 3,5066739 (-10)-
Numerus = − 0,00000 03211 25.

$L.\,si.\frac{1}{2}(\lambda'-\lambda) = L.\,sin.\ 19^{\circ}\,14'\,55'' = 9{,}5180764$

$L.\,c.\,\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda) = L.\,c.\ 185^{\circ}\,25'\,45'' = 9{,}9980473$

$Log.\ 0{,}00000\,00053\,44\ldots = 1{,}7278664\ (-10)$

$Log.$ producti..... $= 1{,}2439901(-10)$-

Numerus $= -\ 0{,}00000\,00017\,53.$

$Log.\,tang.(45^{\circ}+\frac{1}{2}\lambda') = L.\,t.\ 65^{\circ}\,28'\,4'' = 0{,}3406590$

$Log.\,tang.(45^{\circ}+\frac{1}{2}\lambda) = L.\,t.\ 61^{\circ}\,57'\,5'' = 0{,}2673724$

$Log.\{tang.(45^{\circ}+\frac{1}{2}\lambda') : tang.(45^{\circ}+\frac{1}{2}\lambda)\} = 0{,}0732866$

$Log.\ 0{,}0732866 = 8{,}8650248\ (-10)$

$Log.\ 2{,}30258\,50929\,94 = 0{,}3622157$

$Log.$ producti..... $= 9{,}2272405\ (-10)$

Numerus $= 0{,}16874\,87350\,39$

Habemus igitur:

$$\phi'-\phi = \frac{r}{sin.1''}\left\{0{,}16874\,87350\,39 - 0{,}00064\,14310\,00 + 0{,}00000\,03211\,25 + 0{,}00000\,00017\,53\right\}$$

$$= \frac{r}{sin.1''}\cdot 0{,}16810\,69811\,61$$

$Log.\ 0{,}16810\,69811\,61 = 9{,}2255857\ (-10)$

$Log.\ r = Log.\ tang.\ 65^{\circ} = 0{,}3313275$

$9{,}5569132\ (-10)$

$Log.\ sin.\ 1''\ldots\ldots = 4{,}6855750\ (-10)$

$Log.\ (\varphi'-\varphi) = 4{,}8713382.$

Ergo $(\varphi'-\phi) = 74358'',800 = 20^{\circ}\,39'\,18''.$

Pro sphæra invenitur $(\varphi'-\phi) = 20^{\circ}\,44'\,05''.$

§ XXXVII.

Transeamus ad solutionem secundæ quæstionis, quæ hujusmodi est:

Quæstio secunda. *Data duorum locorum differentia latitudinis et linea loxodromica, id est, dato tum angulo loxodromico, tum lineæ loxodromicæ longitudine a primo loco ad alterum, invenire differentiam longitudinis eorundem locorum?*

§ XXXVIII.

Hæc quæstio resolvitur si invenire possimus differentiam longitudinis

quæsitæ in functione differentiæ latitudinis, anguli loxodromici et longitudinis ipsius loxodromicæ lineæ, inter illos locos interceptæ. Ope formularum (19) et (20) § 35, invenitur differentia longitudinis duorum locorum in functione anguli loxodromici, differentiæ et summæ latitudinum; sed etiam in illis formulis cum occurrat $Tang.\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda)$, et $Tang.\frac{1}{2}(90^\circ+\lambda')$, utraque latitudo separatim cognita sit necesse est. Datur hac quæstione differentia latitudinis; si igitur invenire possimus summam latitudinum in functione datæ longitudinis lineæ loxodromicæ, etiam utriusque loci latitudo in functione illius longitudinis data erit. Etenim si detur

$$\lambda'-\lambda=a,$$

atque si invenerimus .... $\lambda'+\lambda=f(l)$

erit $\lambda'=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}f(l)$ et $\lambda=\frac{1}{2}f(l)-\frac{1}{2}a$.

§ XXXIX.

Invenimus autem

$$l=6375,73730.\,\sigma.\{K.\lambda+L.\,sin.2\lambda+M.\,sin.4\lambda+N.\,sin.6\lambda.\}$$

(vid. § 30 formula (16′), quæ longitudo referenda erit ad locum priorem; longitudo autem quæ ad alterum locum refertur, cujus latitudo est λ', erit

$$l'=6375,73730.\,\sigma.\{K.\lambda'+L.\,sin.2\lambda'+M.\,sin.4\lambda'+N.\,sin.6\lambda'.\}:$$

Ergo:

$$(l'-l)=6375,73730.\,\sigma.\{K.(\lambda'-\lambda)+L.(sin.2\lambda'-sin.2\lambda)+M.(sin.4\lambda'-sin.4\lambda)+N.(sin.6\lambda'-sin.6\lambda).\}$$

id est, adhibita cognita reductione,

$$(l'-l)=6375,73730.\,\sigma.\{K(\lambda'-\lambda)+2L\,sin.(\lambda'-\lambda)\,cos.(\lambda'+\lambda)+2M\,sin.2(\lambda'-\lambda)\,cos.2(\lambda'+\lambda)$$
$$+2N\,sin.3(\lambda'-\lambda)\,cos.3(\lambda'+\lambda).\}\ \dots\dots\dots\dots\ (21)$$

Est autem $cos.2(\lambda'+\lambda)=2cos.^2(\lambda'+\lambda)-1$; $cos.3(\lambda'+\lambda)=4cos.^3(\lambda'+\lambda)-3cos.(\lambda'+\lambda)$;

Ergo $(l'-l)=6375,73730.\,\sigma.\{[K.(\lambda'-\lambda)-2M.sin.2(\lambda'-\lambda)]+2[L.sin.(\lambda'-\lambda)-3N.sin.3(\lambda'-\lambda)].$
$cos.(\lambda'+\lambda)+4M.sin.2(\ '-\lambda)cos.^2(\lambda'+\lambda)+8N.sin.3(\lambda'-\lambda)cos.^3(\lambda'+\lambda)\dots\}$

Datur in hac serie, quæ ad terminum quartum perducta est, (quoniam reliqui sine errore omitti possunt) $(l'-l)$, $(\lambda'-\lambda)$; ergo etiam $sin.(\lambda'-\lambda)$, $sin.2(\lambda'-\lambda)$, $sin.3(\lambda'-\lambda)$, et σ, atque incognita nobis est $(\lambda'+\lambda)$; igitur hæc series, si spectetur ut æquatio tertii gradus ip-

sius $cos.(\lambda'+\lambda)$, inservire potest ad determinandum illum $cos.(\lambda'+\lambda)$; quo invento cognoscetur etiam $(\lambda'+\lambda)$, hinc, ope datæ differentiæ $(\lambda'-\lambda)$ inveniuntur λ' et λ in functione eorundem datorum, ac denique si hæ functiones substituantur in serie (19) aut (20), obtinetur longitudinis differentia in functione anguli loxodromici latitudinis differentiæ et datæ longitudinis lineæ loxodromicæ. — Quæstio igitur erit soluta.

§ XL.

Verum quum difficultates considerarem, quibus nostro casu, æquationis illius tertii gradus resolutio adstricta esset, quandoquidem, ut præberem solutionem generalem nulla alia, nisi Cardani resolvendi methodus in promptu erat, et cum illam methodum applicationi minime aptam viderem, ob magnos coefficientes in serie nostra occurrentes, ea omnia cum considerarem, aliam solvendi rationem institui oportere arbitrabar. Hæc solutio eo nititur fundamento, quod, cum differentiam axium telluris $= \frac{1}{317}$ supposuerimus, terminus quartus seriei inventæ (21), nimirum, $2N.sin.3(\lambda'-\lambda)\ cos.3(\lambda'+\lambda)$, omitti etiam potest, ita ut nullum hoc inducat errorem : quod exemplo manifestare conabor.

§ XLI.

Sit, uti in exemplo antecedente, $\lambda'-\lambda = 7^\circ\ 41'\ 58''$; $\lambda'+\lambda = 74^\circ\ 10'\ 18''$; angulus loxodromicus $= 65^\circ$.

Primum calculo subjiciamus coefficientes K, L, M et N. (vid. § 29.)

$$K = 0,99068\,49393\,56 - 0,00137\,19493\,50\frac{1}{\sigma^2} - 0,00000\,1609536\frac{1}{\sigma^4} - 0,00000\,00087\,50\frac{1}{\sigma^6}.$$

$$\text{sive } K = a - \frac{b}{\sigma^2} - \frac{c}{\sigma^4} - \frac{d}{\sigma^6}.$$

$$Log.\,\sigma = Log.\,sec.\,65^\circ = 0,3740517.$$

$Log.\,b. = 7,1373381\ (-10)$	$Log.\,c. = 4,2067007\ (-10)$	$Log.\,d. = 11,9420081\ (-20)$
$Log.\,\sigma^2 = 0,7481034$	$Log.\,\sigma^4 = 1,4962068$	$Log.\,\sigma^6 = 2,2443102$
$Log.\,\frac{b}{\sigma^2} = 6,3892347\ (-10)$	$Log.\,\frac{c}{\sigma^4} = 2,7104939\ (-10)$	$Log.\,\frac{d}{\sigma^6} = 9,6976979\ (-20)$
$\frac{b}{\sigma^2} = 0,00024\,50330\,56.$	$\frac{c}{\sigma^4} = 0,00000\,00512\,26.$	$\frac{d}{\sigma^6} = 0,00000\,00000\,50.$

Ergo $K = 0,9904398 55034.$

$L = 0,00221\,37991\,34 - 0,00068\,77429\,41 \frac{1}{\sigma^2} - 0,00000\,1071470 \frac{1}{\sigma^4} - 0,00000\,0006441 \frac{1}{\sigma^6}.$

$$= a - \frac{b}{\sigma^2} - \frac{c}{\sigma^4} - \frac{d}{\sigma^6}.$$

$Log.\ b = 6,8374262\ (-10)$ $Log.\ c = 4,0299801\ (-10)$ $Log.\ d = 11,8089555\ (-20)$
$Log.\ \sigma^2 = 0,7481034$ $Log.\ \sigma^4 = 1,4962068$ $Log.\ \sigma^6 = 2,2443102$

$Log.\ \frac{b}{\sigma^2} = 6,0893228\ (-10)$ $Log.\ \frac{c}{\sigma^4} = 2,5336733\ (-10)$ $Log.\ \frac{d}{\sigma^6} = 9,5646431\ (-20)$

$\frac{b}{\sigma^2} = 0,00012\,28351\,71.$ $\frac{c}{\sigma^4} = 0,00000\,00341\,72.$ $\frac{d}{\sigma^6} = 0,00000\,00000\,37.$

Ergo $L = 0,00209\,09297\,54.$

$M = 0,00000\,20608\,24 - 0,00000\,08606\,82 \frac{1}{\sigma^2} - 0,00000\,01327\,54 \frac{1}{\sigma^4} - 0,00000\,00012\,38 \frac{1}{\sigma^6}.$

$$= a - \frac{b}{\sigma^2} - \frac{c}{\sigma^4} - \frac{d}{\sigma^6}.$$

$Log.\ b = 3,9348427\ (-10)$ $Log.\ c = 3,1230476\ (-10)$ $Log.\ d = 11,0927206\ (-20)$
$Log.\ \sigma^2 = 0,7481034$ $Log.\ \sigma^4 = 1,4962068$ $Log.\ \sigma^6 = 0,2443102$

$Log.\ \frac{b}{\sigma^2} = 3,1867393\ (-10)$ $Log.\ \frac{c}{\sigma^4} = 1,6268408\ (-10)$ $Log.\ \frac{d}{\sigma^6} = 8,8484104\ (-20)$

$\frac{b}{\sigma^2} = 0,00000\,01537\,23.$ $\frac{c}{\sigma^4} = 0,00000\,00042\,35.$ $\frac{d}{\sigma^6} = 0,00000\,00000\,07.$

Ergo $M = 0,00000\,19028\,59.$

$N = 0,00000\,00023\,24 - 0,00000\,0000\,34 \frac{1}{\sigma^2} - 0,00000\,00003\,95 \frac{1}{\sigma^4} - 0,00000\,00001\,39 \frac{1}{\sigma^6}.$

$$= a - \frac{b}{\sigma^2} - \frac{c}{\sigma^4} - \frac{d}{\sigma^6}.$$

$Log.\ b = 1,0145202\ (-10)$ $Log.\ c = 10,5965971\ (-10)$ $Log.\ d = 10,1430148\ (-20)$
$Log.\ \sigma^2 = 0,7481034$ $Log.\ \sigma^4 = 1,4962068$ $Log.\ \sigma^6 = 2,2443102$

$Log.\ \frac{b}{\sigma^2} = 0,2664168\ (-10)$ $Log.\ \frac{c}{\sigma^4} = 9,1003903\ (-20)$ $Log.\ \frac{d}{\sigma^6} = 7,8987046\ (-20)$

$\frac{b}{\sigma^2} = 0,00000\,0001\,85.$ $\frac{c}{\sigma^4} = 0,00000\,00000\,13.$ $\frac{d}{\sigma^6} = 0,00000\,00000\,00.$

Ergo $N = 0,00000\,00021\,26.$

$\lambda' - \lambda = 7° 41' 58'' = 27718''$

Log. 27718″ = 4,4426052	*Log. sin.* $(\lambda' - \lambda)$ = 9,1270288 (−10)
Log. sin. 1″ = 4,6855709 (−10)	*Log. cos.* $(\lambda' + \lambda)$ = 9,4357741 (−10)
Log. $(\lambda' - \lambda)$ = 9,1281801 (−10)	*Log.* L.... = 7,3203394 (−10)
Log. K. = 9,9958282 (−10)	*Log.* 2.... = 0,3010300
Log. K. $(\lambda' - \lambda)$ = 9,1240083 (−10)	*Log. product.* = 6,1841723 (−10).

Term. primus = K $(\lambda' - \lambda)$ = 0,13304 79794 89; *Termin. secundus* = 0,00015 28172 11.

Log. sin. 2 $(\lambda' - \lambda)$ = 9,4241258 (−10)
Log. cos. 2 $(\lambda' + \lambda)$ = 9,9500358 (−10) (*negat.*)
Log. M.... = 4,2794067 (+10)
Log. 2..... = 0,3010300
Log. producti = 3,9345983 (−10) (*negat.*)
Term. tertius = — 0,00000 00860 19.

Terminus primus + *Termino secundo* — *Termino tertio* = 0,13320 07106 81.

Log. 0,13320 07106 81 = 9, 1245065 (−10)
Log. 6375,73730 = 3, 8045306
Log. 6....... = 0, 5740517
Log. $(l' - l)$... = 3, 3030888
$(l' - l)$... = 2009,50569 *milliaribus.*

Sive $(l' - l)$ = 2009 *kilometris* + 5 *hectometris* + 4 *metris.*

Hic igitur est viæ confectæ valor, adhibitis solummodo tribus terminis seriei (21); adjiciamus autem quartum terminum:

Log. sin. 3 $(\lambda' - \lambda)$ = 9,5935903 (−10)
Log. cos. 3 $(\lambda' + \lambda)$ = 9,8675267 (−10) (*negat.*)
Log. N...... = 1,3275633 (−10)
Log. 2..... = 0,3010300
Log. product. = 1,0897103 (−10) (*negat.*)
Terminus quartus = — 0,00000 00012 29.

Ergo terminus (1) + (2) — (3) — (4) = 0,13320 07094 52.

Ergo cum *Log.* 0,13320 07094 52 = 9,1245061 (−10) fere idem sit atque *Log.* 0,13320 07106 81 supra, differet etiam $(l' - l)$ adhibitis quatuor terminis, fere nihil ab $(l' - l)$, adhibitis tribus terminis.

§ XLII.

Cum igitur quartus terminus, in valorem longitudinis $(l'-l)$ nihil faciat, erit

$$(l'-l)=6375,73750.\sigma.\{K(\lambda'-\lambda)+2L.sin.(\lambda'-\lambda).cos.(\lambda'+\lambda)+2M sin.2(\lambda'-\lambda).cos.2(\lambda'+\lambda)\}.$$

sive

$$(l'-l)=6375,73750,\sigma.\{[K(\lambda'-\lambda)-2M sin.2(\lambda'-\lambda)]+2L sin.(\lambda'-\lambda)cos.(\lambda'+\lambda) + 4M sin.2(\lambda'-\lambda).cos.^2(\lambda'+\lambda).\}.\ (22).$$

Cum detur $(l'-l)$, facias $\frac{l'-l}{6,6375,75730}=h$: quod si tunc æquatio antecedens methodo cognita respectu $cos.(\lambda'+\lambda)$ resolvatur, prodibit

$$cos.(\lambda'+\lambda)=\frac{-L.sin.(\lambda'-\lambda)}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$$

$$\frac{\pm\sqrt{\{16h.M.sin.2(\lambda'-\lambda)+32M^2sin.^2 2(\lambda'-\lambda)+4L^2sin.^2(\lambda'-\lambda)-16K.M.(\lambda'-\lambda)sin.2(\lambda'-\lambda)\}}}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda).}$$

§ XLIII.

Characteres + et — ante radicis characterem videntur duos valores diversos $cos.(\lambda'+\lambda)$ præbere, unum minorem, alterum majorem quam 90°; ideoque duobus modis quæstio resolvi posse videtur: sed si valorem ipsius $cos.(\lambda'+\lambda)$ propius inspiciamus, patebit, duos hos characteres simul locum obtinere non posse. Etenim si ita proponatur

$$cos.(\lambda'+\lambda)=\frac{-2L.sin.(\lambda'-\lambda)}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$$

$$\frac{\pm\sqrt{\{4.L^2sin.^2(\lambda'-\lambda)+8M.sin.2(\lambda'-\lambda)[2h.+4M.sin.2(\lambda'-\lambda)-2K.(\lambda'-\lambda)]\}}}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$$

patet: 1° quantitatem cujus radix sumi oportet, semper esse majorem quam $2L.sin.(\lambda'-\lambda)$; et cum $8M.sin.2(\lambda'-\lambda)[2h.+4M.sin.2(\lambda'-\lambda)-2K(\lambda'-\lambda)]$ sit minor quam $[8M.sin.2(\lambda'-\lambda)]^2$, — quoniam $2h.$ et $2K\times(\lambda'-\lambda)$ fere æquales sunt, ideoque $2h+4M sin.2(\lambda'-\lambda)-2K(\lambda'-\lambda)$ propemodum $=4M.sin.2(\lambda'-\lambda)$, igitur $8M.sin.2(\lambda'-\lambda).[2h.+4M sin.2(\lambda'-\lambda)-2K(\lambda'-\lambda)$, propemodum $=8M.sin.2(\lambda'-\lambda)\,4M.sin.2(\lambda'-\lambda)]$ ideoque minor quam $[8M.sin.2(\lambda'-\lambda)]^2$, — eam ob causam 2° patet,

quantitatem, quâ $\sqrt{\{4L^2 sin.^2(\lambda'-\lambda) + caet.\}}$ major est, quam $2L.sin.(\lambda'-\lambda)$, minorem futuram, quam $8M.sin.2(\lambda'-\lambda)$: pone igitur

$$cos.(\lambda'+\lambda) = \frac{-2L.sin.(\lambda'-\lambda) \pm (2L.sin.(\lambda'-\lambda) + a)}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$$

Ergo 1° $cos.(\lambda'+\lambda) = \frac{a}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$ .... 2°... $cos.(\lambda'+\lambda) = \frac{-4L.sin.(\lambda'-\lambda) - a}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$

a minor est quam $8M.sin.2(\lambda'-\lambda)$, ut diximus; et cum uterque numerus unitate minor sit, (quod ex præcedenti calculo satis manifestatur,) erit $\frac{a}{8M.2sin.(\lambda'-\lambda)}$ unitate semper minor; sed quoniam $4L.sin.(\lambda'-\lambda)$ longe major sit, quam $8M.sin.2(\lambda'-\lambda)$, erit $\frac{-4L.sin.(\lambda'-\lambda)-a}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$ unitate semper major; ergo erit hoc casu, $cos.(\lambda'+\lambda)$ unitate semper major, idque absurdum est. — Formula inventa igitur unum tantummodo valorem præbet $cos.(\lambda'+\lambda)$; atque ille valor obtinetur, si calculo subjiciatur sequens formula

$$cos.(\lambda'+\lambda) = \frac{-2L.sin.(\lambda'-\lambda)}{8M.sin.2(\lambda'-\lambda)}$$
$$+ \frac{\sqrt{\{4L^2 sin.^2(\lambda'-\lambda) + 8M.sin.2(\lambda'-\lambda)[2h + 4M.sin.2(\lambda'-\lambda) - 2K(\lambda'-\lambda)]\}}}{8M sin.2(\lambda'-\lambda)} \quad ..(23).$$

§ XLIV.

Si igitur omnia colligamus, quæ huc usque, inde a § 37, dicta sunt, sequens subsistit systema æquationum, quibus quæstio posita resolvi potest.

Sit $(\lambda'-\lambda)$ differentia latitudinum; τ *tangens* anguli loxodromici; σ *secans* ejusdem anguli; $(l'-l)$ longitudo lineæ loxodromicæ inter duos locos interceptæ et milliaribus expressæ.

$$K = 0,99068\,49393\,56 - 0,00137\,19493\,56\frac{1}{\sigma^2} - 0,00000\,16095\,56\frac{1}{\sigma^4} - 0,00000\,00087\,50\frac{1}{\sigma^6}, \ldots(a)$$

$$L = 0,00221\,37991\,54 - 0,00068\,77429\,41\frac{1}{\sigma^2} - 0,00000\,10714\,70\frac{1}{\sigma^4} - 0,00000\,00064\,41\frac{1}{\sigma^6}, \ldots(b)$$

$$M = 0,00000\,20608\,24 - 0,00000\,08606\,82\frac{1}{\sigma^2} - 0,00000\,01527\,54\frac{1}{\sigma^4} - 0,00000\,00012\,58\frac{1}{\sigma^6}, \ldots(c)$$

$$h = \frac{l'' - l}{6375{,}73730 \, . \, \varpi} \dots\dots\dots\dots (d)$$

$$\cos.(\lambda'+\lambda) = \frac{-L.\sin.(\lambda'-\lambda) + \sqrt{\{L^2 \sin.^2(\lambda'-\lambda) + 4M.\sin.2(\lambda'-\lambda)\,[h + 2M\sin.2(\lambda'-\lambda) - K(\lambda'-\lambda)]\}}}{4M\sin.2(\lambda'-\lambda)} \quad (e)$$

hinc invenitur $(\lambda'+\lambda)$, et cum detur $\lambda'-\lambda$, cognoscitur etiam λ' et λ: denique differentia longitudinis geographicæ hâc formulâ invenitur

$$\delta = \Phi' - \Phi = \frac{\varpi}{1\sin.''}\Big\{2{,}50258\,50929\,94\, Log.\Big\{\frac{Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda')}{Tang.(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda)}\Big\} - 0{,}01197\,60477\,02 \sin.\tfrac{1}{2}(\lambda'-\lambda) \times$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(\lambda'+\lambda) - 0{,}00000\,59580\,70 \sin.\tfrac{3}{2}(\lambda'-\lambda)\cos.\tfrac{3}{2}(\lambda'+\lambda) - 0{,}00000\,00053\,44 \times$$
$$\sin.\tfrac{5}{2}(\lambda'-\lambda)\cos.\tfrac{5}{2}(\lambda'+\lambda)\Big\} \dots\dots\dots\dots (f)$$

§ XLV

Exemplum particulare non afferam, illustrabo autem calculo particulari formulam (e) antecedentis §; ad quod efficiendum utar iis, quæ in præcedenti exemplo § 41 inventa sunt.

$Log.h = 9{,}1245065 - 10$; $Log.2M\sin.2(\lambda'-\lambda) = 4{,}0045625 - 10$; $Log.K(\lambda'-\lambda) = 9{,}1240083 - 10$

$h = 0{,}15520\,07\,10681$; $2M\sin.2(\lambda'-\lambda) = 0{,}00000\,1010561$; $K(\lambda'-\lambda) = 0{,}15304\,7979489$

$h + 2M\sin.2(\lambda'-\lambda) - K(\lambda'-\lambda) = 0{,}00015\,37417\,53.$

$Log.\ 0{,}00015\,37417\,53 = 6{,}1867918\ (-10$

$Log.4M\sin.2(\lambda'-\lambda) = 4{,}3055925\ (-10$

$Log.\ producti. = 0{,}4923843\ (-10$

$Numerus = 0{,}00000\,00003\,11$

$Log.L.\sin.(\lambda'-\lambda) = 6{,}4473682 - 10$

$Log.L^2.\sin.^2(\lambda'-\lambda) = 2{,}8947364 - 10$

$L^2.\sin.^2(\lambda'-\lambda) = 0{,}00000\,00784\,76$

Igitur $L^2.\sin.^2(\lambda'-\lambda) + 4M\sin.2(\lambda'-\lambda) \times$ cet.... $= 0{,}00000\,00787\,87.$

$Log.\ 0{,}00000\,00787\,87 = 2{,}8964546 - 10.$

$Log.\sqrt{0{,}00000\,00787\,87} = 6{,}4482273 - 10.$

Ergo $\sqrt{0{,}00000\,00787\,87} = 0{,}00028\,06862\,57$

$-L.\sin.(\lambda'-\lambda) \dots - = 0{,}00028\,01355\,06$

Differentia: $= 0{,}00000\,05507\,51.$

$Log.\ 0{,}00000\,05507\,51 = 3{,}7413553\ (-10$

$Log.4M.\sin.2(\lambda'-\lambda) = 4{,}3055925\ (-10$

$Log.\cos.(\lambda'+\lambda) = 9{,}4357628$

Ergo $(\lambda'+\lambda) = 74^\circ\ 10'\ 19''.$

In exemplis antecedentibus dabatur $\lambda'+\lambda = 74^\circ, 10'\ 18''$: ergo differentia est $1''$, qui error nullius momenti est.

§ XLVI.

Si alter locorum, v. c. locus cujus latitudo est λ (*Fig.* 7.), in parte australi telluris situs sit, erit λ ratione λ' negativa, ergo differentia latitudinum fit earum summa, et vicissim summa fit differentia: nimirum datur $bc-(-ae) = bc + ae = \lambda' + \lambda$, ergo, cum formula (22) evadat

$$ab = l' + l = 6375{,}73730.\,\sigma\{K.(\lambda'+\lambda) - 2M.sin.2(\lambda'+\lambda) + 2L.sin.(\lambda'+\lambda)\times cos.(\lambda'-\lambda) + 4M.sin.2(\lambda'+\lambda)\,cos.^2(\lambda'+\lambda)\}$$

invenienda est $\lambda' - \lambda$; quæ differentia eodem modo, æquatione (e) § 44 obtinetur, atque supra invenimus summam $\lambda' + \lambda$, mutatis scilicet mutandis; sed inventa $(\lambda'-\lambda)$, et ob eam causam, λ et λ', adhibenda est series (20) § 35, ad differentiam longitudinis inveniendam.

§ XLVII.

In his omnibus supposuimus differentiam axium (*applattissement*) esse $\frac{1}{314}$, eaque inter varias suppositiones (*différentes suppositions d'applattissement*) minima est; si autem aliæ differentiæ admittantur v. c. maxima $\frac{1}{150}$, perspicuum est formulas inventas non inservire posse ad problema solvendum.

Solutio, quam dedimus, eo nititur fundamento, quod (vid. § 40 et 41) tres termini seriei (21) sufficiunt ad longitudinem lineæ loxodromicæ, inter locos duos interceptam, accuratissime inveniendam. Si vero major sumatur differentia axium, majores etiam fiunt coefficientes K, L, M, N, ejusdem seriei, et pluribus tum opus est terminis, ad illam longitudinem determinandam. Si autem differentia axium fuisset $\frac{1}{150} = 0{,}00666\,66666\,66$, esset $e^2 = 0{,}01328\,88888\,88$ (vid. § 26 et 28): his inveni, primum terminum coefficientis D § 28, æqualem fieri $0{,}00000\,00711\,57$, et tandem fiet terminus primus coefficientis N, § 29, $= 0{,}00000\,002900\,90$. Ergo cum series (21), posita differentia axium $= \frac{1}{314}$, ad tres terminos producta, sufficeret ad longitudinem $(l'-l)$ determinandam, ejusque tertii termini coefficiens M æqualis sit $0{,}00000\,20608\,24$ - *caet.*, sufficiet

etiam, si ponamus differentiam axium esse $\frac{1}{150}$, seriem dictam ad terminum quartum producere, cujus quarti termini coefficiens N æqualis est 0, 00000 02900 90 - *caet.*, ideoque minor quam coefficiens M, quem suppositione $\frac{1}{334}$ obtinuimus.

Æquatio cujus ope, hoc casu, summa latitudinum $(\lambda' + \lambda)$ invenitur, est tertii gradus, uti vidimus § 39; et cum ejus resolutio, si fieri posset, at certe multis magnisque difficultatibus obstricta sit, hanc sequentem methodum approximativam proponimus, quâ quæsita summa $(\lambda' + \lambda)$ accuratissime innotescet.

§ XLVIII.

Sint K′, L′, M′, N′, coefficientes seriei cujusdam, quæ est formæ ejusdem, atque series (21); quæ autem convenit cum alia suppositione differentiæ axium, v. c. cum maxima differentia $\frac{1}{150}$. Hæc series si producatur ad terminum tertium, erit

$$(l'-l) = 6375{,}73730.\, r\,\{[K'(\lambda'-\lambda) - 2M'\,sin.2(\lambda'-\lambda)] + 2L'\,sin.(\lambda'-\lambda)\,cos.(\lambda'+\lambda) + 4M'\,sin.2(\lambda'-\lambda)\,cos.^2(\lambda'+\lambda)\}$$

sive
$$h = [K'(\lambda'-\lambda) - 2M'\,sin.2(\lambda'-\lambda)] + 2L'\,sin.(\lambda'-\lambda)\,cos.(\lambda'+\lambda) + 4M'\,sin.2(\lambda'-\lambda)\,cos.^2(\lambda'+\lambda);$$

si autem eadem series producatur ad quartum terminum, hæc erit

$$h = [K'(\lambda'-\lambda) - 2M'\,sin.2(\lambda'-\lambda)] + 2[L'\,sin.(\lambda'-\lambda) - 3N'\,sin.3(\lambda'-\lambda)]\,cos.(\lambda'+\lambda) + 4M'\,sin.2(\lambda'-\lambda)\,cos.^2(\lambda'+\lambda) + 8N'\,sin.3(\lambda'-\lambda)\,cos.^3(\lambda'+\lambda):$$

si ex serie prima, tanquam ex æquatione secundi gradus, resolvatur $cos.(\lambda'+\lambda)$, prodibit, uti vidimus:

$$cos.(\lambda'+\lambda) = \frac{-L'\,sin.(\lambda'-\lambda)}{4M'\,sin.2(\lambda'-\lambda).}$$

$$\frac{+\sqrt{\{L'^2\,sin.^2(\lambda'-\lambda) + 4M'\,sin.2(\lambda'-\lambda)\,[h + 2M'\,sin.2(\lambda'-\lambda) - K'(\lambda'-\lambda)]\}}}{4M'\,sin.2(\lambda'-\lambda).} \quad (\alpha)$$

Si autem in serie altera terminus quartus, scilicet $8N'\,sin.3(\lambda'-\lambda) \times cos^3.(\lambda'+\lambda)$, tanquam constans consideretur, atque ea conditione ratione $cos.(\lambda'+\lambda)$ resolvatur, erit

$$\cos.(\lambda'+\lambda) = \frac{-[L' \sin.(\lambda'-\lambda) - 3N' \sin.3(\lambda'-\lambda)]}{4M' \sin.2(\lambda'-\lambda)} +$$

$$\frac{\surd\{(L')^2 \sin.^2(\lambda'-\lambda) + 4M' \sin.2(\lambda'-\lambda)\,[h + 2M' \sin.2(\lambda'-\lambda) - K'(\lambda'-\lambda)]}{4M' \sin.2(\lambda'-\lambda)} \cdots\cdots$$

$$\frac{-3N' \sin.3(\lambda'-\lambda)\,[2L' \sin.(\lambda'-\lambda) - 3N' \sin.3(\lambda'-\lambda)] - 32N'M' \sin.2(\lambda'-\lambda) \sin.3(\lambda'-\lambda) \cos.^3(\lambda'+\lambda)\}}{4M' \sin.2(\lambda'-\lambda)} \quad (\beta)$$

Cum igitur opus est quarti termini rationem habere, sequenti modo opus procedit.

Primum ope formulæ (α), in qua omnia elementa cognita sunt, inveniatur $\cos.(\lambda'+\lambda)$, erit hicce valor non verus sed vero accedet: tum in formula (β), loco $\cos.^3(\lambda'+\lambda)$ ponatur ille valor, qui formulâ (α) modo inveniebatur. Quodsi tum calculo subjiciatur formula (β), prodibit alter valor $\cos.(\lambda'+\lambda)$, qui ad verum valorem magis accedet. Si autem denuo valoris accepti potestas tertia ponatur loco $\cos.^3(\lambda'+\lambda)$, in formula ($\beta$), accuratior inde proveniet tertius valor ipsius $\cos.^3(\lambda'+\lambda)$; et sic tamdiu opus procedat oportet, quamdiu duo valores subsequentes ipsius $\cos.(\lambda'+\lambda)$ differunt. Etenim si duo illi valores fiant æquales, indicio hoc erit, inventum $\cos.(\lambda'+\lambda)$ justum habere valorem.

§ XLIX.

Casu igitur, quo differentia axium est maxima, quatuor sufficiunt termini seriei (21), ad inveniendas latitudines duorum locorum, quorum differentia latitudinis datur, et pars intercepta lineæ loxodromicæ. Sed illam rationem, qua antecedentem quæstionem solvi, tum etiam idoneam esse, cum major esset differentia axium, id est, cum plures termini seriei (21) postularentur, statuere non ausim.

Nam, cum ex serie (21), quæ in genere hujus est formæ, $h = a(\lambda'-\lambda) + b\cos.(\lambda'+\lambda) + c\cos.^2(\lambda'+\lambda) + d\cos.^3(\lambda'+\lambda) + e\cos.^4(\lambda'+\lambda) +$ caet., et quæ celeriter convergit, uti ex superioribus vidimus, cum ex illa serie, dico, valor $\cos.(\lambda'+\lambda)$ requiratur, si series, pluribus quam tribus aut quatuor terminis constaret nihil fere aliud nobis restaret, quam seriem illam convertere, id est, aliam invenire, quæ secundum cognita elementa, $(\lambda'-\lambda)$, h, a, b, c, caet. esset ordinata.

Rationem hanc primum secutus eram: series autem, quæ tandem prodibat, vel maxime divergere apparuit; fuitque formâ, usui minime apta: eam ob causam, et quoniam multum temporis, ad coefficientes illius seriei calculandos, requirebatur, viam istam non ingressus sum. Sed illam calcavi, quam supra ostendi, et quæ tum a me cernebatur, cum, calculatione coefficientium seriei (21), viderem, seriem illam vel maxime convergere.

Sed et hæc ratio, ut dixi, inservire nobis potest, si major sit differentia axium. Etenim si series (21) primum ad tres terminos producta intelligatur, atque tunc ex illa serie seu æquatione, resolvatur $cos.(\lambda'+\lambda)$: deinde ad quatuor terminos sit producta, atque si, ope inventi valoris $cos.(\lambda'+\lambda)$, ex prima serie, denuo resolvatur respectu $cos.(\lambda'+\lambda)$, uti fecimus in § 48, ille valor secundus, vero valori magis accedet. Tum series ad quinque terminos produci potest, et si eodem modo tractetur, obtinebimus tertium valorem $cos.(\lambda'+\lambda)$; et sic ad infinitum progredi possumus, donec justum valorem acceperimus. Et quamquam tali rationi insignis labor adjunctus est, tamen anteponi debet illi methodo, quæ in seriebus convertendis consistit.

§ L.

Restat nobis, quæstionem propositam solvere casu, quo tellus est globus. Hoc casu differentia longitudinis erit:

$$\partial=\phi'-\phi=\frac{\tau}{sin.1''}\,2,30258\,50929\,94\;Log.\left\{\frac{Tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\lambda')}{Tang.(45^\circ+\frac{1}{2}\lambda)}\right\}\ldots\ldots(\epsilon)$$

(*vid.* form. 18. § 33) et longitudo lineæ loxodromicæ inter duos locos

$$l'-l=6375{,}73730.\sigma(\lambda'-\lambda).\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(\zeta)$$

Namque in serie (21) omnes coefficientes L, M, N, *caet.*, utpote ex excentricitatis præsentia orti, evanescunt: K autem unitati fit æqualis. (*Conf.* § 28.)

Hæ duæ æquationes dantur ad problematis solutionem exhibendam; cum autem ex æquatione (ζ) ea invenienda sunt, quæ in functione (ϵ) sunt incognita, nimirum λ et λ', sive potius λ, quoniam $\lambda'=\lambda+(\lambda'-\lambda)$;

apparet, quæstionem positam in globi superficie esse indeterminatam, namque elementa, quibus constat functio (ζ), omnia cognita sunt, neque inservire possunt ad ea determinanda, quæ in æquatione (ε) requiruntur.

Atque hanc quæstionem tum indeterminatam esse, ex loxodromicæ lineæ, in globi superficie ductæ, natura sponte sequitur. Etenim cum § 19 viderimus, longitudinem lineæ loxodromicæ inter duos locos, ad determinatam distantiam a se invicem positos, semper esse ejusdem magnitudinis, ubicumque hi loci siti sint, sive sint prope æquatorem, sive prope polos, sequitur, differentiam longitudinis illorum locorum non esse determinatam: quoniam hæc differentia, seu potius, quoniam angulus, meridianos inter, qui per hosce locos transeunt, augetur sive diminuitur, prouti illi loci polis seu æquatori propiores sumuntur.

§ LI.

Si autem data fuisset latitudinum summa, facile quæstio resolveretur, si tellus sphærica admittatur. Nam, cum functio (ζ) præbeat latitudinum differentiam, invenitur utraque latitudo separatim, et tum functio (ε) applicari poterit. Hujus quæstionis solutio majorem exigit laborem, si tellus ponatur sphærois; namque in serie

$h = K(\lambda'-\lambda) + 2L\cos.(\lambda'+\lambda)\sin.(\lambda'-\lambda) + 2M\cos.2(\lambda'+\lambda)\sin.2(\lambda'-\lambda)$ *caet.*

hoc casu non datur $(\lambda'-\lambda)$, sed $(\lambda'+\lambda)$, et invenienda est differentia $(\lambda'-\lambda)$; et quoniam tum ipse arcus $(\lambda'-\lambda)$, tum ejus *sinus*, $\sin.(\lambda'-\lambda)$, in illa serie occurrit, optimum videtur, valorem *sinus* in functione ipsius arcus evolvere, quod instituitur ope seriei cognitæ

$$\sin. p = p - \frac{p^3}{1.2.3.} + \frac{p^5}{1.2.3.4.5} - \frac{p^7}{1.2.3.4.5.6.7.} + \text{caet.}$$

et quandoquidem hæc series, si loco p scribatur, $(\lambda'-\lambda)$, $2(\lambda'-\lambda)$, ac tum multiplicetur primum per $2L.\cos.(\lambda'+\lambda)$, dein per $2M.\cos.2(\lambda'+\lambda)$, (qui coefficientes admodum parvi sunt) quandoquidem hæc series, dico, tum celeriter convergit, paucis certo opus erit terminis, ita ut differentia quæsita determinari possit, eodem modo, ac § 48 summam $(\lambda'+\lambda)$ determinavimus.

§ LII.

Series omnes atque functiones, quas inveni, sufficiunt ad solvendas omnes quæstiones, quæ in Astronomia Nautica de linea loxodromica proponi possunt; sed causam non video cur illas quæstiones earumque solutiones hic præberem, cum meum specimen inutiliter talibus extenderem, quæ non postulantur.

Quæstionem propositam ita elaboravi, ut vires sinebant: num vestro, Viri Clarissimi! judicio hæc placeant, eventus docebit. Quum vero hoc ex studio multos sane fructus perceperim,

Quid tentasse nocet?

APPENDIX.

CONSTRUCTIO PROJECTIONUM LINEÆ LOXODROMICÆ.

Quamquam ad quæstionem directe non pertinet, lineæ loxodromicæ constructionem exponere; tamen, quoniam in capite primo de linea illa, tanquam de linea curva duplicis curvaturæ, egi, non alienum videtur, linearum curvarum, quæ ipsius loxodromicæ sunt projectiones, figuras expendere, earumque constructiones huic specimini addere.

Hæ constructiones non nisi approximativæ esse possunt, idque in multis curvis obtinet, veluti in *spirali elliptica, parabolica, hyperbolica,* aliisque; neque etiam exponam constructionem projectionum hujus lineæ, in sphæroïdis superficie ductæ; nam, quamvis fieri possit talis constructio, tamen nimis est implicata: sed, quandoquidem differentia axeos telluris et radii æquatoris vel minima est, ideoque sphærois non multum differt a globo, si tum de sphæroïde, tum de sphæra hæ projectiones fuissent factæ, tam exigua esset figurarum differentia, quæ sensibus fortasse observari non posset. Primum igitur exponemus

Constructionem projectionis horizontalis *lineæ loxodromicæ, in sphæræ superficie ductæ.*

Sit *Fig.* 8, OAB æquatoris pars; C polus, P locus quidam, cujus latitudo est PA $= \lambda$; CA, Ca, Cb, CB, meridiani, quam proximi; PW linea loxodromica, erit CPW angulus loxodromicus: demittantur ex punctis P, P′, P″, caet., perpendicula Pp, P′p', P″p'', caet., in planum æquatoris, quod ab illis, in punctis p, p', p'', secatur; hæc, quam proxime sumta, constituunt lineam curvam, quæ projectionem horizontalem lineæ loxodromicæ exhibet. Ex lineæ loxdromicæ proprietate, (*vid.* § 18 et 19), figuræ PQP′, P′Q′P″, *caet.* gaudent proprietatibus triangulorum rectangulorum rectilineorum; ergo si P′Q, P″Q′, WQ″, *caet.*, æquales sumantur, erunt, ob angulos æquales PP′Q, P′P″Q′, *caet.*, etiam arcus PQ, P′Q′, P″Q″, *caet.* æquales: ducantur ex centro O circuli concentrici, per puncta p, p', p'', *caet.*, erunt hi circuli projectiones circulorum parallelorum, qui ipsis circulis parallelis æquales sunt, et ob id idem, erunt etiam $pq =$ PQ, $p'q' =$ P′ Q′ *caet.*, id est $pq = p'q' = p''q''$, *caet.* Probatur hoc etiam ex æquatione differentiali $d\phi = \frac{r.d\lambda}{cos.\lambda}$ (*vid.* § 23). Namque, si $d\lambda$ non utpote differentialis, sed tanquam differentia (*différence finie,*) spectetur, convenit $d\lambda$ cum parte P′Q: ergo erit $d\phi =$ PQ. Sit $d\phi' =$ P′Q′; $d\lambda' =$ P″Q′, erit

$$d\phi : d\phi' = \frac{d\lambda}{cos.\lambda} : \frac{d\lambda'}{cos.\lambda'};$$

$cos.\lambda$ et $cos\lambda'$ æquales sunt radiis circulorum parallelorum, sive æquales radiis Op, Op', *caet.* $= r$ et r'; ergo si sumantur $d\lambda$, $d\lambda'$ æquales, erit

$$d\phi : d\phi' = \frac{1}{r} : \frac{1}{r'} = r' : r;$$

sed si duorum circulorum arcus quidam sunt in ratione inversa radiorum, erunt hi arcus æquales, ergo $d\phi = d\phi'$; atque de reliquis arcubus P″Q′, *caet.*, cum idem ratiocinium valeat, patet, quod dictum est.

Si detur $d\lambda$, datur etiam $d\phi = \tau . d\lambda$, ope trianguli rectanguli, cujus cathetus æqualis est $d\lambda$, et angulus huic catheto oppositus, æqualis angulo loxodromico. Ex his omnibus sequitur hæc constructio. *Fig.* 9. Ducatur circulus, cujus radius AO, radio æquatoris æqualis cogitetur: ergo ipse circulus æquatoris planum repræsentat: in hoc plano, erit O projectio utriusque poli. Projiciantur deinde in illud circuli paralleli, qui siti sunt ad latitudines λ, $\lambda + d\lambda$, $\lambda + 2d\lambda$, $\lambda + 3d\lambda$, *caet.*, quod hoc modo fit: sint R et P duo puncta, quorum latitudines sunt $AR = \lambda$, $AP = \lambda + d\lambda$, demittantur ex illis punctis perpendicula RQ, PS in radium OA, atque ex centro O, radiis OQ et OS, describantur duo circuli, qui erunt projectiones dictorum parallelorum. Pone autem P' esse projectionem puncti lineæ loxodromicæ, quod punctum simul continetur in circulo parallelo, cujus projectio est circulus $P'Q$: ducatur OP', fiatque in projectione SC, alterius circuli paralleli, $CP'' = d\phi$, erit punctum P'' alterum punctum projectionis quæsitæ. Quodsi illa constructio pro omnibus punctis, inde a puncto A, iteretur, invenitur tota projectio lineæ loxodromicæ, quæ ostenditur *Fig.* A. *Tabula* II.

In illa curva exemplo sumsimus lineam loxodromicam, cujus angulus loxodromicus æqualis est 70°; itidem sumsimus $d\lambda = 2\frac{1}{2}°$. Sit *Fig.* B *Tabula* II., $BOD = 70°$, $OD =$ longitudini arcus $2\frac{1}{2}$ graduum circuli, cujus radius est OA; *Fig.* A: ducatur BD parallela lineæ OA, et BA perpendicularis ipsi OA, erit $OA = AB$. *Tang.* $OBA = \tau\, d\lambda = d\phi$. Ut constructio fuisset accuratissima, opus esset, ut, vel particulari constructione, vel calculo, innotesceret longitudo arcus, qui æqualis est $2\frac{1}{2}°$ circumferentiæ illius circuli, cujus radius est OA, *Fig.* A; itidemque requireretur, ut calculo constaret quot graduum, in diversis circulis parallelis, esset arcus $d\phi$; verum admodum molestum hoc esset; eam ob causam approximative idem feci, et circulum extremum, *Fig.* A, magna mensura representavi, ita ut arcus $2\frac{1}{2}°$, tanquam linea recta

haberi possit; atque ut arcus $d\phi$ in omnibus circulis parallelis fierent æquales, dividi lineam OA, *Fig.* B, in aliquot partes æquales minores; et si ita singulæ partes transferantur in circulorum peripherias, accuratissime inveniuntur longitudines $d\phi$ in diversis illis peripheriis. Manifestum hoc fit, inspectâ figurâ A, in qua arcus CD et HI, qui in diversis circulis, quorum radii sunt OM et ON, sumti sunt, longitudine fere non differunt, si partes ipsius lineolæ OA, *Fig.* B, separatim in has circumferentias translatæ sint.

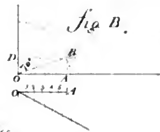
Constructio projectionis verticalis.

Projectio verticalis lineæ loxodromicæ, ope horizontalis projectionis constructæ, sequenti modo invenitur. Demittatur *Fig.* 3. *Tabula* 1, ex puncto quodam P lineæ loxodromicæ, perpendicularis PS in planum YMY′, erit S projectio verticalis puncti P, dum Q est projectio horizontalis. Si autem tellus est sphæra, erit $PQ = $ sinui latitudinis $= sin.\lambda$; $OQ = GP =$ radio circuli paralleli, per punctum P transeuntis $= cos.\lambda$: sed QT perpendicularis est OM, et ST perpendicularis eidem OM; ergo $ST = PQ = sin.\lambda$: hinc sequitur hæc constructio. *Fig.* 9. *Tab.* 1.

Sit P″ punctum projectionis horizontalis; ducatur P″T perpendicularis in lineam AO, eaque linea indefinite producatur: describatur radio $OP'' = cos.\lambda$, ex centro O, circuli arcus, secans AO in S, erit $OS = cos.\lambda$, et SP, perpendicularis in OA, $= sin.\lambda$: sumatur $TS' = SP = sin.\lambda$, eritque S′ punctum projectionis verticalis lineæ loxodromicæ. Nam si semicirculus OADC, circum lineam COA, tanquam circum axim, vertetur, donec perpendiculariter insistat plano CBAO, puncta P″, T, S′ in statu eodem erunt, atque puncta Q, F, S, *Fig.* 3, ergo erit S′ punctum projectionis verticalis; quum illa constructio adhibetur in omnibus punctis horizontalis projectionis, *Fig.* A, *Tabula* II, prodibit projectionis verticalis forma, *Fig.* C.

Si constructiones eædem instituantur pro lineis loxodromicis, in australi hæmisphæra sitis, similes proveniunt curvæ, in figuris A et C, *punctis* significatæ; quæ tamen a curvis in boreali parte projectis, non separatæ sunt, sed cum his integras curvas constituunt, quæ sunt projectiones lineæ loxodromicæ, ab uno polo ad alterum, in sphæræ superficie, ductæ.




fig. B.
D
B
O
A
O
A

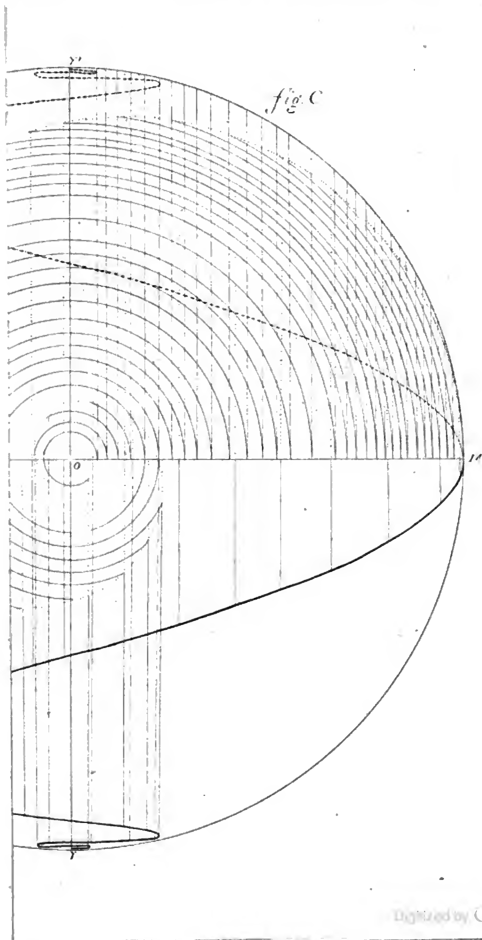
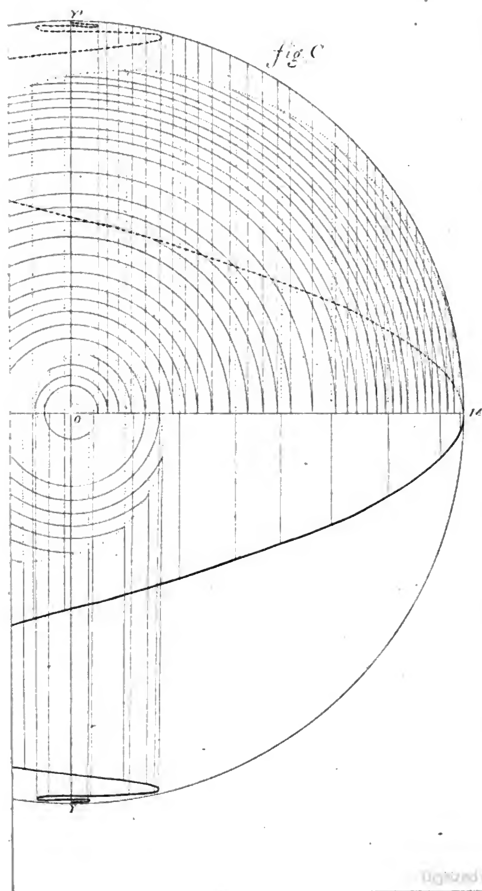
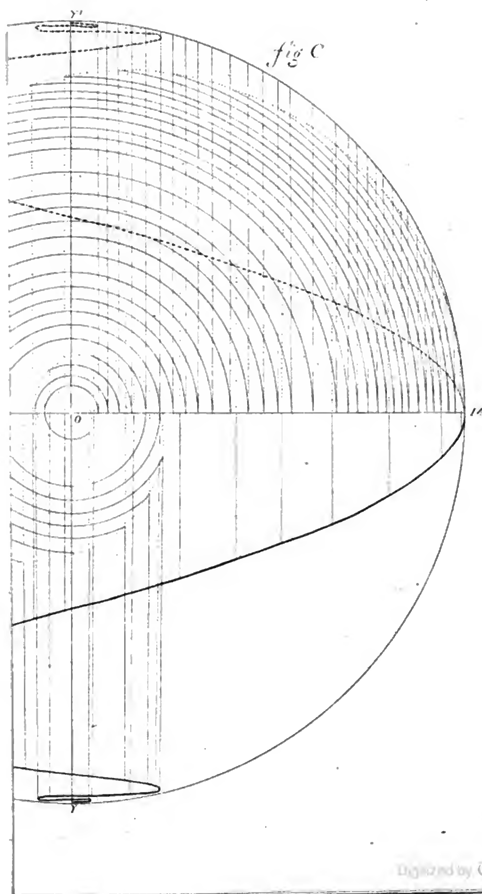


fig. C
y'
o
14
y


fig. C
Y'
O
14
Y


fig C
Y'
O
14
Y

(2)

GIDEONIS JANI VERDAM,

MYDRECHTO-BATAVI,

MATHESEOS AC PHILOSOPHIAE NATURALIS IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA CANDIDATI,

RESPONSIO

AD

QUAESTIONEM ASTRONOMICAM,

„ *Determinetur Vis, qua corpus e Luna sit projiciendum in Tellu-*
„ *rem, ut et Tempus, quod impenderet illud corpus ad hanc viam*
„ *absolvendam,*"

IN CERTAMINE LITERARIO

CIVIUM

ACADEMIARUM BELGICARUM,

Die VIII. *Mensis Februarii A.* MDCCCXXV,

EX SENTENTIA

ORDINIS DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM ET PHYSICARUM ACADEMIAE LUGDUNO-BATAVAE,

PRAEMIO ORNATA.

LUGDUNI BATAVORUM,

APUD S. ET J. LUCHTMANS,

ACADEMIAE TYPOGRAPHOS,

MDCCCXXV.

GIDEONIS JANI VERDAM,

MYDRECHTO-BATAVI,

MATHESEOS AC PHILOSOPHIAE NATURALIS IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA CANDIDATI,

RESPONSIO

AD

QUAESTIONEM ASTRONOMICAM, A NOBILISSIMA FACULTATE DISCIPLINARUM MATHEMATICARUM AC PHYSICARUM, IN ACADEMIA LUGDUNO-BATAVA, A. MDCCCXXIV. PROPOSITAM:

Quaestio: *Determinetur Vis, qua corpus e Luna sit projiciendum in tellurem, ut et Tempus, quod impenderet illud corpus ad hanc viam absolvendam.*

QUAE PRAEMIUM REPORTAVIT D. VIII MENSIS FEBRUARII A. MDCCCXXV.

RESPONSIO

AD

QUAESTIONEM ASTRONOMICAM.

---

1. Si corpus e luna projiciatur in tellurem, atque in spatio procedat, ipsius motus, vi quadam motrice effectus, variis viribus agentibus mutatur et determinatur. Simul atque enim e superficie lunae profectum est corpus, et in directione vis projicientis procedere conatur, ipsa luna, semper gravitans in corpora, hoc corpus projectum rursus ad se trahit, eique in motu alium dat cursum, ex quo autem ipsius telluris vi attractiva denuo deflectitur, et novam viam ingredi cogitur: corpus autem, dum in lunae superficie versatur, una cum luna vehitur circa tellurem, et simul etiam afficitur vi centrifuga, in directione lineae, tangentis lunae superficiem; haec autem vis oritur e rotatione lunae circa axim fixum, ad orbitam lunarem paullo inclinatum. Si igitur corpus e luna projiciatur, motus rotatorius circa tellurem, et motus centrifugus circa axim lunae, jam jam conservantur, et cum reliquis motibus conjunguntur.

2. Quamvis autem luna una cum tellure circa solem ducatur, eamque ob causam talis motus corpori moventi etiam communicetur, tamen, quoniam hicce motus ad solem refertur, et tum pro tellure, tum pro luna, idem est atque pro corpore, corpus non impeditur solis actione in motu, qui ad tellurem ejusque satellitem refertur; quapropter terram quiescentem consideremus licitum erit.

Revera sol, et etiam planetae magna vi agunt in tellurem et praecipue in lunam, ita ut hujus motus circa tellurem vel maxime sit irregularis; sed tantam esse hanc actionem, ut, si non consideretur, inde proveniat insignis variatio in tempore transitus ipsius corporis projecti, non est quod opiner; quare etiam has vires perturbatrices omittere liceat.

Cum autem luna non perturbatur in ejus motu circa tellurem, non multum etiam a veritate deviamus, si ejusdem motum uniformem, eamque ob rem, ejus radium vectorem medium, ad tellurem ductum, fere constantem habeamus; tum enim tam parva est excentricitas orbitae lunaris, ut in determinatione vis projicientis et temporis, ejus valor non multum faciat.

Natura denique problematis ejusmodi nobis videtur, ut, praeter tellurem, et lunam quiescentem fingere liceat; si enim tellus quiescat et lunam circa se ducat, corpus, e luna projectum, eodem motu rotatorio afficitur; ergo, quantum luna procedit ab *Occidente* versus *Orientem*, tantum et corpus provehitur in eadem directione, ita ut motus rotatorius corporis, ratione lunae non observetur; si igitur hunc motum excludamus, nil omittitur, quo motus relativus de luna ad tellurem mutatur; ergo cum supposuerimus, motum lunae fere esse uniformem, ejusque radium vectorem constantem, nunc etiam eo facilius supponere possumus: *corporis transitum eodem modo fieri, sive luna circa tellurem agitetur, sive quiescat;* quas hypotheses eo libentius arripimus, quoniam magnas difficultates levare, ideoque ipsum problema nostris viribus magis adaptare videntur.

3. Determinatur vis, qua corpus e luna est projiciendum ut in tellurem perveniat, si inveniatur velocitas, qua corpus e luna abit et in tellurem venit: itaque aptum nobis visum est, primum invenire generalem formulam seu valorem velocitatis, ex qualibet vi motrice ortae; et inde determinare minimum ipsius velocitatis, qua corpus, e luna profectum, telluris superficiem potest attingere: hac autem vi determinata, temporis functionem e formulis inventis deducere conabimur.

4. Accuratius igitur determinemus vires agentes.

a. Vis projectionis.

b. Vis centrifuga e lunae rotatione *nata.*

Hae vires uniformiter agunt, ideoque uniformem velocitatem efficiunt in motu corporis; quapropter e determinatione generali effectus virium acceleratricium excluduntur, sed tum demum in nostro calculo considerandae sunt, cum virium acceleratricium intensitates in quovis temporis puncto determinaverimus; inserviunt igitur illae vires uniformes, ad determinandas *constantes*, ita dictas *arbitrarias*, cum agere incipiant in motus origine.

c. Vis attractionis.

Haec vis ipsi materiae corporum coelestium insita est, et agit in ratione directa *quantitatis materiei*, atque in ratione inversa duplicata *distantiarum;* unicuique atomo propria est, sed ex mechanica liquet, si massa sphaerica aut spheroïdea attrahat punctum, ad distantiam x ab ejus centro positum, attractionem omnis massae eandem esse, atque si haec massa in centro fuisset collecta; ergo erit attractio massae telluris M in punctum quoddam extrinsecus positum, proportionalis ipsi $\frac{M}{x^2}$; sic etiam si massa lunaris m agat in idem punctum, ad distantiam y ab ipsius centro positum, erit attractio proportionalis $\frac{m}{y^2}$. Si autem corpus projectum consideremus, ejusque massam vocemus μ, attractio non locum habet in punctum sed in massam μ. Haec massa μ eodem modo agit in tellurem et in lunam, easque attrahit cum viribus, quae proportionales sunt valoribus

$\frac{\mu}{x^2}$

$\frac{\mu}{x^2}$ et $\frac{\mu}{y^2}$; corpus μ resistit igitur hisce viribus; *actio autem aequalem producit reactionem;* ergo et terra et luna non modo resistunt viribus $\frac{\mu}{x^2}$ et $\frac{\mu}{y^2}$, sed aequalibus actionibus reagunt, eamque ob causam attrahunt massam μ viribus $\frac{M+\mu}{x^2}$ et $\frac{m+\mu}{y^2}$. Probabile autem est, si corpus, a luna vi quadam distractum, versus tellurem procedat, ejus massam esse haud magnam ratione massarum telluris et lunae; ergo haud valida intensitate agit in hasce massas corpus projectum; et ea propter ejus actionem in tellurem et in lunam negligere possumus. Ergo vires attractivae, quae corporis motum mutant et determinant, proportionales sunt valoribus $\frac{M}{x^2}$ et $\frac{m}{y^2}$.

5. His positis, sint (Fig. 1.) T et L centra telluris et lunae; sit TLX orbita lunaris, TL radius vector; sit C locus quidam corporis projecti, et concipiamus illum locum tellurem inter et lunam. Ducamus radios TC et CL; sit CA perpendicularis in planum TLX orbitae; Ax sit perpendicularis in radium vectorem TL. Ponamus coördinatarum originem in centro fixo telluris T, et vocentur:

radius telluris $= a$;	angulus variabilis LTA $= \phi$;
radius lunae $= b$;	angulus variabilis ATC $= \psi$;
radius vector TL $=$ R;	radius variabilis TC $= r$;

sunt igitur ϕ, ψ, r coördinatae centrales corporis projecti; et quoniam coördinata r actione telluris diminuitur, erit:

$$\text{vis, qua corpus trahitur versus terram} = -\frac{M}{r^2};$$

$$\text{et vis, quae agit versus lunam} = +\frac{m}{CL^2}.$$

Linea CF, in plano perpendiculari CTF ducta, sit perpendicularis radio CT; ducatur in plano, quod per CF transit perpendiculariter plano CTF, linea CE, perpendicularis lineis CT et CF; erunt lineae CB, CE, CF perpendiculares inter se.

Decomponatur vis attractiva, agens in directione CL, in tres alias vires, in directionibus perpendicularibus CB, CE, CF, erit:

$$\text{vis decomposita in directione CB} = \frac{m}{CL^2} \cdot \textit{Cos.}\ LCB,$$

$$\text{vis decomposita in directione CE} = \frac{m}{CL^2} \cdot \textit{Cos.}\ LCE,$$

$$\text{vis decomposita in directione CF} = \frac{m}{CL^2} \cdot \textit{Cos.}\ LCF.$$

Vis, decomposita in directione TCB, opposita est directioni ipsius vis $\frac{M}{r^2}$; scilicet si terram inter et lunam positum sit corpus; sin autem corpus versetur in C′, agunt vires $\frac{M}{r^2}$ et $\frac{m}{CL^2}$. *Cos.* LCB in eadem directione; sed in praesenti supponemus corpus ita projectum, ut semper versetur intra tellurem et lunam, quare absoluta vis, agens in directione TCB, erit

$$= -\frac{M}{r^2} + \frac{m}{CL^2} \cdot Cos.\ LCB.$$

Vis, directa secundum CE, agit perpendiculariter in planum TCA, seu parallela plano orbitae TLX, et mutare conatur angulum ATL $= \phi$; agit igitur in directione AG, parallela lineae CE, et arcum Ag, radio TA descriptum, tangenti in A; (idem enim est, sive vis agat in CE, sive applicetur ad punctum A in directione AG,) angulus ϕ hac vi diminuitur, uti e figura manifestatur, ergo vis, agens in directione AG, et mutans angulum ϕ, aequat

$$-\frac{m}{CL^2} \cdot Cos.\ LCE.$$

Vis, directa in CF, semper agit perpendicularis in lineam TC, ideoque tendit secundum tangentem arcûs, radio CT $= r$ descripti, et cum deorsum agat, erit vis qua diminuitur angulus ψ

$$= -\frac{m}{CL^2} \cdot Cos.\ LCF.$$

6. Secundum dynamices principia, vires acceleratrices, quae in directionibus CT, CF aut Cf, CE sive AG aut Ag agunt, generali modo proponuntur per: $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2 AG}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2 CF}{\partial t^2}$; ($\partial t$ notante differentialem temporis, uniformiter crescentis.) Est autem, si π significet semicirculi circumferentiam, $\partial Ag : \partial\phi = 2\pi AT : 360° = \pi r \,.\, Cos.\,\psi : 180°$; ergo $\partial Ag = \frac{\pi}{180°} \cdot r \cdot Cos.\,\psi \cdot \partial\phi$; et $\partial^2 Ag = \frac{\pi}{180°} \cdot r \cdot Cos.\,\psi \cdot \partial^2\phi$; unde $\partial^2\phi = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{1}{r \,.\, Cos.\,\psi} \cdot \frac{\partial^2 Ag}{\partial t^2}$; simili modo habetur $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 Cf}{\partial t^2}$; et cum vires $\frac{\partial^2 Ag}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 Cf}{\partial t^2}$ dentur, habemus sequentes valores virium acceleratricium, quae coördinatarum variationem efficiunt.

$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{m}{CL^2} \cdot Cos.\, BCL,$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{180^o}{\pi \cdot r \cdot Cos. \psi} \cdot \frac{m}{CL^3} \cdot Cos.\, LCE,$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{180^o}{\pi \cdot r} \cdot \frac{m}{CL^2} \cdot Cos.\, LCF;$$

quae ut fiant integrationi aptae, primum determinandi sunt valores CL, *Cos.* BCL, *Cos.* LCE, *Cos.* FCL.

7. $Tx = AT \cdot Cos.\, ATL = r \cdot Cos.\, \phi \cdot cos.\, \psi$;

$Lx = LT - Tx = R - r \cdot Cos.\, \phi \cdot Cos.\, \psi$; $Ax = r \cdot Cos\, \psi\, Sin.\, \phi$;

$LA^2 = Ax^2 + Lx^2 = (R - r \cdot Cos.\, \phi \cdot Cos.\, \psi)^2 + r^2 \cdot Sin.^2 \phi \cdot Sin.^2 \psi$;

$AC = CT \cdot Sin.\, CTA = r \cdot Sin.\, \psi$ et $CL^2 = AC^2 + AL^2 = R^2 - 2Rr \cdot Cos.\, \phi \cdot Cos.\, \psi + r^2 \cdot Cos.^2 \psi \cdot Cos.^2 \phi + r^2 \cdot Sin.^2 \phi \cdot Cos.^2 \psi + r^2 \cdot Sin.^2 \psi = R^2 - 2Rr \cdot Cos.\, \phi \cdot Cos.\, \psi + r^2$ . . . . (α).

Collocetur in puncto T centrum globi, cujus radius aequat unitatem, orietur in ejus superficie triangulum sphaericum $\alpha\beta\gamma$, rectum in γ, in quo ex cognita proprietate:

$Cos.\, \alpha\beta = Cos.\, CTL = Cos.\, \gamma\beta \cdot Cos.\, \gamma\alpha$; ergo $Sin.\, CTL = \sqrt{(1 - Cos.^2 \phi\, Cos.^2 \psi)}$, porro in triangulo CTL, $CL^2 : TL^2 = Sin.^2\, CTL : Sin.^2\, TCL$ ($= Sin.^2\, BCL$); ergo:

$$Sin.^2\, BCL = \frac{TL^2 \cdot Sin.^2\, TCL}{CL^2} = \frac{R^2 \cdot (1 - Cos.^2 \phi \cdot Cos. \psi)}{R^2 - 2Rr \cdot Cos. \psi\, Cos. \phi + r^2},$$

et inde invenitur:

$$Cos.\, BCL = \frac{R \cdot Cos.\, \phi\, Cos.\, \psi - r}{\sqrt{(R^2 - 2Rr\, Cos\, \psi\, Cos.\, \phi + r^2)}} = \frac{R \cdot Cos.\, \phi\, Cos.\, \psi - r}{CL} \;.\;.\; (\beta).$$

Transeat globi superficies per plana LAC, LCF et CAF, posito centro in C, aderit triangulum sphaericum $\alpha'\beta'\gamma'$, in quo, $\alpha'\gamma' = ACF = \psi$; $\angle \beta'\alpha'\gamma' = \angle DAL$; (quoniam AD et AL perpendiculares sunt lineae AC,) $\alpha'\beta' = \angle ACL$. Est autem: $AL : TL = Sin.\, LTA : Sin.\, TAL$, ergo $Sin.\, TAL = Sin.\, DAL = \frac{TL \cdot Sin.\, LTA}{AL}$ $\frac{R \cdot Sin.\, \phi}{AL} = Sin.\, \beta'\alpha'\gamma'$; unde $Cos.\, DAL = \frac{\sqrt{(AL^2 - R^2\, Sin.^2 \phi)}}{AL}$; $AL = CL \cdot Sin.\, LCA$; $Sin.\, LCA = \frac{AL}{CL} = Sin.\, \alpha'\beta'$; $Cos.\, \alpha'\beta' = \frac{AC}{CL} = \frac{r \cdot Sin.\, \psi}{CL}$. Obtinet in triangulo sphaerico $\alpha'\beta'\gamma'$ haec proprietas:

$Cos.\, \beta'\gamma' = Cos.\, FCL = Cos.\, \beta'\alpha'\gamma' \cdot Sin.\, \alpha'\beta' \cdot Sin.\, \alpha'\gamma' + Cos.\, \alpha'\beta' \cdot Cos.\, \alpha'\gamma =$

$$\frac{\sqrt{(AL^2 - R^2\, Sin.^2 \phi)}}{AL} \cdot \frac{AL}{CL} \cdot Sin.\, \psi + \frac{r \cdot Sin.\, \psi}{CL} \cdot Cos.\, \psi =$$

$$\frac{\sqrt{(R^2\, Cos.^2 \phi - 2Rr\, Cos.\, \phi\, Cos.\, \psi + r^2 \cdot Cos.^2 \psi)}}{CL} \cdot Sin.\, \psi + \frac{r \cdot Sin.\, \psi\, Cos.\, \psi}{CL} =$$

(R

$$\frac{(R\ Cos.\ \phi - r\ Cos.\ \psi)\ .\ Sin.\ \psi + r\ .\ Sin.\ \psi\ .\ Cos.\ \psi}{CL} = \frac{R\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ \psi}{CL} \quad \ldots (\gamma).$$

Ejusdem globi superficies generat alium triangulum sphaericum, ex intersectione cum planis CAL, CEL, et CEGA; scilicet triangulum $\alpha'\beta'\gamma'$, in quo: $\alpha'\gamma' = 90^\circ$; $\angle\beta'\alpha'\gamma' = \angle LAG = \angle GAD - \angle LAD = 90^\circ - \angle LAD$; $\alpha'\beta' = \angle ACL$; habemus igitur, ob $\alpha'\gamma' = 90^\circ$,

$$Cos.\ \beta'\gamma' = Cos.\ ECL = Cos.\ \beta'\alpha'\gamma'\ .\ Sin.\ \alpha'\gamma'\ .\ Sin.\ \alpha'\beta' =$$

$$Cos.\ (90^\circ - LAD)\ .\ Sin.\ 90^\circ\ .\ Sin.\ \alpha'\beta' - \frac{R\ Sin.\ \phi}{AL} \cdot \frac{AL}{CL} = \frac{R\ Sin.\ \phi}{CL} \quad \ldots (\delta).$$

8. Substituantur valores functionum (α), (β), (γ), (δ), in valoribus functionum virium acceleratricium, eritque:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{m(R\ Cos.\ \phi\ Cos.\ \psi - r)}{\sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\ \phi\ Cos.\ \psi + r^2)^3}}, \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{180^\circ}{\pi\ .\ r\ .\ Cos.\ \psi} \cdot \frac{mR\ .\ Sin.\ \phi}{\sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ \psi + r^2)^3}}, \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{180^\circ}{\pi\ .\ r} \cdot \frac{mR\ .\ Sin.\ \psi\ Cos.\ \phi}{\sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ \psi + r^2)^3}} \ldots\ldots (3)$$

Multiplicentur hae formulae generales per $2\partial r$, $2\partial\phi$, $2d\psi$, deinde integrentur methodis cognitis, et habemus:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \frac{2M}{r} + \frac{2m}{\sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ \psi + r^2)}} + C, \ldots\ldots (4)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 = \frac{180^\circ}{\pi r^2} \cdot \frac{2m}{Cos.^2\ \psi\ \sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ \psi + r^2)}} + C', \ldots (5)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{180^\circ}{\pi r^2} \cdot \frac{2m}{\sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\ \phi\ .\ Cos.\ \psi + r^2)}} + C'', \ldots (6)$$

$\frac{\partial r}{\partial t}$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ notant velocitates, in directione coördinatarum, ergo formulae integratae exhibent quadratas velocitates in quovis puncto viae conficiendae. Ut autem justae sint hae velocitates, opus est cognoscamus valores constantium C′, C″, C‴; eamque ob causam invenire debemus, quaenam sint velocitates in origine motus, ubi tempus incipit, uti et valores coördinatarum r, ϕ, ψ in eadem origine.

9. (Fig. 2) Versetur corpus in lunae superficie in puncto C′; sit PQ axis lunae, quae cum orbita constituit angulum 83° 21′ 0″. 36; (vid. LA PLACE *expos. du Syst. du monde* I. 4 in fine,) qui angulus per integram lunae revolutionem constantis fere manet magnitudinis; angulus igitur orbitam inter et aequatorem lunarem KSM aequat 90° − 83° 21′ 0″. 36 = 6° 38′ 59″. 64. L*p* repraesentat axim eclipticae lunaris NSO. Planum meridiani lunaris NPO perpendiculare in orbitam, atque in directione radii vectoris TNO positum, sit illud planum, a quo *longitudines* et *adscensiones rectae* computan-

tantur. Si autem hoc admittamus, simul etiam supponimus, axim PQ ipsius lunae, in origine motus, esse positum in plano NpO; axis ille perpetuo in hoc plano non positus est; inde enim concluderemus; lineam SL, sive intersectionem orbitae et plani aequatoris KSM, peragere integram revolutionem circa centrum L, eodem tempore, quo ipsa luna circa tellurem vehitur: cum vero e mechanica corporum coelestium liqueat, lineam SL semper parallelam esse *lineae nodorum* orbitae lunaris, atque hanc ipsam lineam fere 6800 diebus volvi circa centrum T; sequitur, axim PQ saepius extra planum NpO esse positum; cum vero in unaquaque lunae revolutione circa terram, radius vector TL bis perpendicularis sit *lineae nodorum* TU, ideoque etiam perpendicularis lineae LS, bis itidem, in unaquaque revolutione lunae, axis PQ versatur in plano NpO; et quandoquidem lunae positio in motus origine prorsus est indeterminata, nil impedit, quo minus talem eligamus positionem et admittamus, in qua axis PQ et radius vector TL in eodem plano perpendiculari versantur; erit igitur $\angle$ PLO = $83^\circ\ 21'\ 0''.\ 36$.

Ponamus, simplicitatis gratia, longitudinem NR loci $C' = 45^\circ$; itidemque ejus latitudinem $CR = 45^\circ$. Sit AC′ perpendicularis in orbitam; ducantur radii TC′, TA, LC′, LA; erit:

$AC' = C'L\ Sin.\ C'LA = b\ Sin.\ 45^\circ$, id est, ob $b = \frac{3}{11}a$, $AC' = \frac{3}{11}a \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ $= \frac{3}{22}a \cdot \sqrt{2}$; $AL = C'L\ Cos.\ ALC' = \frac{3}{22}a \cdot \sqrt{2}$; TL = radio vectori medio = $R = 60 \cdot a$. In triangulo TAL est:

$AL : TL = Sin.\ ATL : Sin.\ TAL = Sin.\ \phi : Sin.\ (180^\circ - (\phi + TLA))$;

$\frac{3}{22}a \cdot \sqrt{2} : 60 \cdot a = \frac{3}{22} \cdot \sqrt{2} : 60 = Sin.\ \phi : Sin.\ (\phi + 45^\circ)$;

unde $tang.\ \phi = \frac{3}{1320 - 3} = \frac{3}{1317}$; inde invenitur, $\phi = 0^\circ\ 7'\ 49''.\ 85$.

Est porro in eodem triangulo:

$AT : AL = Sin.\ TLA : Sin.\ ATL$; $TA : \frac{3}{22}a \cdot \sqrt{2} = Sin.\ 45^\circ : Sin.\ \phi$;

ergo: $AT = \frac{3a \cdot \sqrt{2} \cdot Sin.\ 45^\circ}{22\ Sin.\ \phi} = \frac{3a}{22\ Sin.\ \phi}$; sed $TA = r \cdot Cos.\ \psi$,

ergo, $\frac{3a}{22\ Sin.\ \phi} = r \cdot Cos.\ \psi$; deinde $C'A = r \cdot Sin.\ \psi = \frac{3}{22}a \cdot \sqrt{2}$,

ergo dividendo: $Tang.\ \psi = Sin.\ \phi \cdot \sqrt{2}$; $r = \frac{3}{22}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{Sin.\ \psi}$:

hinc invenitur, $\psi = 0^\circ\ 11'4''.48$; $r = 59{,}8645 \cdot a$.

Invenimus igitur valores coördinatarum in origine motus, nimirum:

$$\left.\begin{array}{l} r' = 59{,}86450 \cdot a \\ \phi' = 0^\circ 7' 49'', 85 \\ \psi' = 0^\circ 11' 4'', 48 \end{array}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (A)$$

10. Sit C′b arcus circuli paralleli, transeuntis per locum C′, erit bC′ parallelus aequatori KSM et perpendicularis radio C′L; et quoniam aequator lunaris inclinat ad orbi-

bitam angulo $6^\circ\, 38'\, 59'', 64$, erit etiam inclinatio lineolae bC' in idem planum $=$ $6^\circ\, 38'\, 59'', 64$; ideoque $\angle AC'b = 90^\circ +$ illa inclinatione $= 96^\circ\, 38'\, 59'', 64$.

Luna autem rotante circa axim PQ, punctum C' describit circulum, aequatori parallelum, radio C'D gaudentem, qui sequenti modo determinatur. Per punctum C' transeat circulus declinationis $pC'R'$, erit C'R declinatio puncti $C' = \angle C'LR'$; datae sunt longitudo et latitudo puncti $C' = 45^\circ$, cognita est inclinatio aequatoris in orbitam; ergo ope formularum trigonometriae sphaericae facile habetur declinatio: calculo autem instituto, patet, declinationem D aequalem esse $40^\circ\, 5'\, 47'', 61$. Deinde

$$\text{radius } C'D = C'L \,.\, Cos.\, DC'L = \tfrac{2}{11} a \,.\, Cos.\, D = 0{,}20863 \,.\, a,$$
$$\text{circumferentia circuli paralleli} = 2\pi \,.\, C'D = 1{,}310833 \,.\, a.$$

Hoc est spatium quod corpus C percurrit eodem tempore, quo luna peragit integram revolutionem: revolutio sideralis lunae absolvitur in $27^d\, 7^h\, 43'\, 4'', 7 = 2360588''$; erit igitur spatium, quod corpus percurrit uno minuto secundo, in directione tangentis puncti $C' = \dfrac{1{,}310833 \,.\, a}{2360688} = 0{,}00000056 \,.\, a$.

Hic numerus, cum determinat corporis velocitatem, ex rotatione lunae ortam, proportionalis est vi centrifugae, quae corpori communicatur, dum luna ab occidente versus orientem circa axem PQ volvitur. Inveniendum igitur est, quantum ipsae coördinatae corporis uno secundo ab hâc vi centrifuga mutentur; id est velocitas inventa resolvi debet in directione coördinatarum, eamque ob causam inveniendi sunt anguli, directionem bC' inter et tres axes rectangulares, quae ratione puncti C' habent eandem positionem, atque (Fig. 1) axes TC, CE, CF ratione puncti C.

11. Sit igitur (Fig. 3) $C'b$ directio, in qua corpus primâ temporis particulâ procedit, habemus, comparando figuras 2 et 3, $\angle LC'b = 90^\circ$; $\angle AC'b = 96^\circ\, 38'\, 59'', 64$. Collocetur in puncto C' centrum globi, qui, ex intersectione planorum TAC', $bC'Ab'$, $bC'L$, in ejus superficie continebit triangula sphaerica $\alpha\beta\gamma$, $\beta\gamma\delta$. In triangulo $\beta\gamma\delta$ est $\beta\delta = 90^\circ$; $\beta\gamma = 96^\circ\, 38'\, 59'', 64$; $\gamma\delta = 90^\circ - C'LA = 45^\circ$: invenitur ergo, ope trigonometriae sphaericae, $\angle \beta\gamma\delta = 83^\circ\, 18'\, 12'', 53$. $\angle TAL = 180^\circ - LTA - ALT = 180^\circ - \phi' - 45^\circ = 134^\circ\, 52'\, 10'', 15$; $\angle TAb' = \angle \beta\gamma\alpha = \angle TAL - \angle LAb' = 51^\circ\, 33'\, 57'', 62$. Habemus igitur in triangulo sphaerico $\alpha\beta\gamma$: $\beta\gamma = 96^\circ\, 38'\, 59'', 64$; $\angle \beta\gamma\alpha = 51^\circ\, 33'\, 57'', 62$; $\alpha\gamma = 90^\circ - ATC' = 89^\circ\, 48'\, 55'', 59$. His datis invenitur arcus $\alpha\beta = \angle bC'T = 51^\circ\, 53'\, 55''\, 23$; . . . . (α')
unde innotescit angulus $\beta\alpha\gamma = 98^\circ\, 36'\, 29'', 60$.

Sit planum $eC'AL'$ perpendiculare plano orbitae, et simul etiam perpendiculare plano TC'A; ducatur $C'e$ parallela lineae AL', erit $C'e$ perpendicularis radio TC'. In triangulo sphaerico $\alpha\beta\gamma'$ erit:

$$\alpha\beta = 51^\circ\, 53'\, 55'', 23;\ \alpha\gamma' = 90^\circ;\ \angle\beta\alpha\gamma' - 90 = 8^\circ\, 36'\, 29'', 60;$$

hinc invenitur arcus $\beta\gamma' = \angle bC'e = 38^\circ\, 54'\, 52'', 30$ . . . . (α'')

Est

Est denique in triangulo sphaerico $\alpha\beta\gamma'$, (si $C'f$ perpendiculariter erigatur radio C'T in plano TC'A) $\alpha\gamma' = 90$; $\alpha\beta = 51^\circ 53' 55'' 23$; $\angle \gamma'\alpha\beta = \angle \gamma'\alpha\gamma' - \angle \beta\alpha\gamma' = 90^\circ - 8^\circ 36' 29'', 60 = 81^\circ 23' 30'', 40$;

unde eruit $\beta\gamma' = \angle bC'f = 83^\circ 14' 6'', 36$ . . . . , ... (α''')

12. Cognitis itaque angulis inter directionem BC' vis centrifugae, et inter lineas perpendiculares TC', eC', fC', habentur valores velocitatum, in directionibus TC', eC', fC', hisce formulis:

velocitas in directione C'T $= 0{,}00000056 \cdot a \cdot Cos.\ 51^\circ 53' 55'', 23 = 0{,}000000341 \cdot a$,
velocitas in directione $eC' = 0{,}00000056 \cdot a \cdot Cos.\ 38^\circ 54' 52'', 30 = 0{,}000000342 \cdot a$,
velocitas in directione $fC' = 0{,}00000056 \cdot a \cdot Cos.\ 83^\circ 14'\ 6'', 36 = 0{,}000000065 \cdot a$.

Ut igitur innotescant valores velocitatum angulorum ϕ et ψ, multiplicandae sunt velocitates in directionibus $C'e$ et $C'f$ per $\frac{180^\circ}{\pi r' Cos. \psi}$ et per $\frac{180^\circ}{\pi r'}$, sic obtinemus ope valorum (A):

velocitas anguli ϕ in motus origine $= 0^\circ{,}000000329$,
velocitas anguli ψ in motus origine $= 0^\circ{,}000000063$.

Habemus igitur, quoniam velocitates in lineis C'T et $C'e$ obtinent in directionibus negativis, sequentes valores velocitatum, ex rotatione lunae orientium:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial t} &= -\ 0^\circ{,}000000341 \cdot a \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\ 0^\circ{,}000000329. \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= +\ 0^\circ{,}000000063. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

13. Ponamus vim explosionis, qua corpus e luna projicitur, agere in qualibet directione $C'g$ (Fig. 2); et cum haec directio in problemate non detur, ideoque indeterminata sit, ponamus idcirco, illam esse ipsum radium LC' productum: sit intensitas hujus vis tanta, ut corpus primo temporis secundo moveatur per spatium $a.l'$, (a notante telluris radium, qua ratione l est ratio spatii percursi et telluris radii,) erunt velocitates in directionibus C'T, $C'e$, $C'f$: in directione C'T $= a.l\ Cos.\ gC'T$; in $C'e = a.l\ Cos.\ gC'e$; et in $C'f = a.l\ Cos.\ gC'f$; ergo mutationes quas continuo subeunt anguli ϕ et ψ, erunt, $\frac{180^\circ}{\pi r'\ Cos.\ \psi} \cdot a.l\ Cos.\ gC'e$; et $\frac{180^\circ}{\pi r'} \cdot a.l\ Cos.\ gC'f$. Anguli $gC'T$, $gC'e$, $gC'f$ facile habentur ope trigonometriae sphaericae; quare, si calculo subjiciantur superiores formulae, obtinemus sequentes velocitates, quae in motus origine ex vi projiciente generantur:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= -\,0{,}49659\,.\,a\,.\,l\\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= +\,0^\circ{,}47963\,.\,l\\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= +\,0^\circ{,}67832\,.\,l\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;,\;.\;(C)$$

14. Si igitur formulis (B) addamus formulas (C), et summas quadremus, habemus valores quadratorum velocitatum in origine motus:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 &= (0{,}49659\,.\,l + 0{,}000000341)^2\,.\,a^2\\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 &= (0^\circ{,}47963\,.\,l - 0^\circ{,}000000329)^2\\ \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 &= (0^\circ{,}67832\,.\,l + 0^\circ{,}000000063)^2\end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(D)$$

Substituantur autem in formulis (4), (5), (6), (art. 7), loco r, ϕ, ψ, earum valores (A), et habemus etiam in motus origine: (si attendamus $\sqrt{(R^2 - 2rR\,.\,Cos.\,\phi\;Cos.\,\psi + r^2)}$ aequalem esse ipsi radio $C'L = b = \frac{3}{11}\,.\,a$:)

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = 0{,}0334088\,.\,\frac{M}{a} + 7{,}3333333\,.\,\frac{m}{a} + C;$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 = 0{,}1174632\,.\,\frac{m}{a^3} + C';$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0^\circ{,}1174632\,.\,\frac{m}{a^3} + C''.$$

Ponamus autem loco massarum M et m earum valores proportionales. Intensitas gravitatis telluris in ejus superficie ad distantiam a a centro, est $\frac{M}{a^2}$; intensitas gravitatis lunae ad eandem distantiam est $\frac{m}{a^2}$; sed massa ipsius lunae supponitur $= \frac{1}{68{,}5}$ massae telluris; (Vid. LA PLACE, *Mecanique Celeste* III. pag. 160.) ergo intensitas gravitatis lunae erit, ad eandem distantiam, $\dfrac{\frac{1}{68.5}\,.\,M}{a^2}$; sed in telluris superficie est $\frac{M}{a^2} = g = 4{,}90608$ metris, ergo ponamus licet:

massam M proportionalem ipsi $4.90608\,.\,a^2$, et

massam m proportionalem ipsi $4.90608\,.\,\frac{a^2}{68.5}$.

Ergo

Ergo formulae praecedentes fiunt:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = 0,0334088 \times 4,90608.a + 7,3333333 \times 4,90608 . \frac{a}{68,5} + C = 0,6891312.a + C;$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 0^\circ,1174632 \times 4,90608 . \frac{1}{68,5.a} + C' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad = 0^\circ,0084129.\frac{1}{a} + C';$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = 0^\circ,1174632 \times 4,90608 . \frac{1}{68,5.a} + C'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad = 0^\circ,0084129.\frac{1}{a} + C''.$$

Si igitur hos valores comparemus cum valoribus (D), exinde determinemus constantes C, C′, C″, easque in functionibus (4), (5), et (6), substituamus, habemus tandem sequentes valores integros velocitatum quadratorum, in directione coördinatarum, et pro quovis puncto viae conficiendae:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \frac{9,81216.a^2}{r} + \frac{0,1432432 . a^2}{\surd(R^2 - 2Rr\, Cos.\psi\; Cos.\varphi + r^2)}$$
$$+ (0,49659 . l + 0,000000341)^2 . a^2 - 0,6891312 . a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = \frac{8,2072302 . a^2}{r^2\, Cos.^2\psi\; \surd(R^2 - 2Rr\, Cos.\psi\; Cos.\varphi + r^2)}$$
$$+ (0^\circ,47963 . l - 0^\circ,000000329)^2 - 0,0084129 . \frac{1}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{8,2072302 . a^2}{r^2\, \surd(R^2 - 2Rr\, Cos.\psi\; Cos.\varphi + r^2)}$$
$$+ (0^\circ,67832 . l + 0^\circ,000000063)^2 - 0,0084129 . \frac{1}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

atque ex hisce formulis invenire debemus, *vim projectionis* et *tempus*, *quod per totum cursum praeterlabitur*.

I.

15. Inquiramus igitur primum in vim projicientem, et ponamus formulas, modo inventas, sub hac forma:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \frac{b . a^2}{r} + \frac{c . a^2}{\surd X} + (d . l + e)^2 a^2 - f . a,$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = \frac{g . a^2}{r^2\, Cos.^2\psi . \surd X} + (h . l - i)^2 - k . \frac{1}{a},$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{g . a^2}{r^2 . \surd X} + (m . l + n)^2 - k . \frac{1}{a},$$

qua ratione habemus, $\surd X = \surd(R^2 - 2Rr\, Cos.\varphi\; Cos.\psi + r^2)$;

b =

$b = 9{,}81216$; $e = 0{,}000000341$; $h = 0{,}47963$; $m = 0{,}67832$;
$c = 0{,}1434392$; $f = 0{,}6891312$; $i = 0{,}000000329$; $n = 0{,}000000063$;
$d = 0{,}49659$; $g = 8{,}2072302$; $k = 0{,}0084129$;

componendo velocitates inventas, obtinemus velocitatem integram, quacum corpus in vera via procedit; si autem vocemus ∂s differentialem ipsius viae, et v justam velocitatem, habemus:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = v^2 = \frac{\partial r^2 + r^2 Cos.^2\psi\,\partial\phi^2 + r^2\partial\psi^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + r^2 Cos.^2\psi\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2.$$

(qui valor eodem modo invenitur, atque differentialis longitudinis curvae lineae, ex differentialibus coördinatarum.)

16. Cogitemus vim projicientem tantam, ut corpus, ex reactione virium acceleratricium, tandem quiescat, in quodam viae puncto; perspicuum est, adhibita vi projiciente minoris intensionis, corpus numquam posse attingere illud quietis punctum, sed, extincta intensitate vis projicientis, ex reactione ipsius lunae, rursus versus lunae superficiem cadet: majori autem vi projiciente, corpus non modo attinget dictum punctum, sed illud etiam transgredietur, et nunc, majori intensitate a terra attractum, quam a luna, tellurem etiam petat oportet. Quodsi talem invenire possimus vim projicientem, qua exstincta, ut ita dicam, corpus quiescit, statim habemus vim, quae satis valet, ad corpus in tellurem projiciendum, si valorem inventum paullo faciamus majorem. Dum corpus tellurem inter et lunam quiescit, nullam habet velocitatem; ergo erit in illo puncto $\frac{\partial s}{\partial t} = 0$; ideoque erunt et velocitates in directione coördinatarum nullae, id est $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0$; habemus igitur in puncto quietis hanc conditionem:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{b\,.\,a^2}{r} + \frac{c\,.\,a^2}{\sqrt{X}} + (dl + e)^2 a^2 - f.a \\ 0 &= \frac{ga^2}{r^2\,Cos.^2\psi\,\sqrt{X}} + (hl - i)^2 - k.\frac{1}{a} \\ 0 &= \frac{ga^2}{r^2\sqrt{X}} + (ml + n)^2 - k.\frac{1}{a} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (E)$$

Ut autem ex his aequationibus inveniamus valorem l, cognoscamus oportet coördinatas puncti, in quo corpus quiescit. Animadvertendum autem est, corpus non posse quiescere, nisi agitetur a viribus aequalibus et directe oppositis; ergo vires attractivae ipsius lunae et telluris et aequales esse debent et directe oppositae; quod fieri nequit, nisi corpus versetur in plano orbitae, et in linea quae telluris et lunae centra conjungit; ergo in hoc puncto $\phi = 0$ et $\psi = 0$: hoc autem aequationibus inventis etiam probatur; nam si $\frac{\partial r}{\partial t}$, $\frac{\partial\phi}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, nullae sint, habemus etiam $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = 0$, $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$, id

est

est, (vid. art. 8.), $o = -\frac{M}{r^2} + \frac{m(R\, Cos.\phi\ Cos.\psi - r)}{\sqrt{(X)^3}}$; $o = -\frac{180^\circ m . R\ Sin.\phi}{\pi r . Cos.\psi \sqrt{(X)^3}}$;

$o = -\frac{180^\circ m\, R\ Sin.\psi\ Cos.\phi}{\pi r . \sqrt{(X)^3}}$; ex secunda et tertia aequatione sequitur $\phi = o$ et $\psi = o$; ergo $Cos.\phi = Cos.\psi = 1$; hac ratione prima aequatio fit:

$$o = -\frac{M}{r^2} + \frac{m(R-r)}{\sqrt{((R-r)^2)^3}} = -\frac{M}{r^2} + \frac{\frac{1}{68,5}.M.(R-r)}{(R-r)^3} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{68,5.(R-r)^2};$$

ex illa invenitur $r = (R.\sqrt{68,5}) : (1 + \sqrt{68,5}) = 53.53203.a = \rho.a$.

Substituamus valores $\phi = o$, $\psi = o$, $r = \rho.a$ in aequationibus (E), atque ex illis obtinemus, calculis institutis:

$$l = \frac{1}{a.d}.\sqrt{\left(f.a - \frac{b.a}{\rho} - \frac{c.a}{R-\rho}\right)} - \frac{e}{d} = \frac{1,400650}{\sqrt{a}} - \frac{e}{d} = 0,0005545,$$

$$l = \frac{1}{h}.\sqrt{\left(\frac{k}{a} - \frac{g}{a\rho^2(R-\rho)}\right)} + \frac{i}{h} = \frac{0,1861356}{\sqrt{a}} + \frac{i}{h} = 0,0000745,$$

$$l = \frac{1}{m}.\sqrt{\left(\frac{k}{a} - \frac{g}{a\rho(R-\rho)}\right)} - \frac{n}{m} = \frac{0.1316105}{\sqrt{a}} - \frac{n}{m} = 0,00005207;$$

(posito nimirum radio medio telluris $= a = 6366193$ metris.)

17. Videntur igitur, cum hi valores ipsius l vel maxime differant, formulae inventae non esse ejusmodi, quae rite accurateque suppeditent quod quaerimus. Verum enim vero cum nulla adhuc methodo approximativa in calculo usi simus, et cum nullum relinquatur dubium, quin justa fuerint analyseos praecepta, aliunde petenda est causa hujus differentiae. Revera si multiplicemus alteram aequationem (E) per $Cos.^2\psi$, eamque a tertia aequatione subducamus, facile invenimus, substitutis numeris pro literis h, i, k, m, n:

$$Cos.^2\psi = \frac{(0,67832.l + 0,000000063)^2 - 0,0084129.\frac{1}{a}}{(0,47963.l - 0,000000329)^2 - 0,0084129.\frac{1}{a}};$$

ergo cum $Cos.^2\psi = 1$, si velocitates in directione coördinatarum simul evanescant, habeamus oportet:

$$(0,67832.l + 0,000000063)^2 - 0,0084129.\frac{1}{a} = (0,47963.l - 0,000000392)^2 - 0,0084129.\frac{1}{a}$$, sive $0,67832.l + 0,000000063 = 0,47963.l - 0,000000329$,

sive $0,19869.l = -0,000000392$, id est, $(m-h).l = -(i+n)$,

idque fieri nequit, nisi aut $(m-h)$ aut l habeant valores alios, quam quibus usi sumus; ergo concludimus: *corpus, in directione radii C'L projectum, numquam posse attingere, in plano orbitae lunaris, tale punctum, in quo ab omni parte aequalibus viribus affi-*

afficitur, ita ut quiescat. Ergo in nostro casu $\frac{\partial r}{\partial t}$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ simul nullae esse non possunt; id est si $r = 53,53203 . a$, non erit $\phi = 0$ neque $\psi = 0$, sed anguli ϕ et ψ gaudebunt quadam magnitudine.

18. Ponamus angulum inter directionem vis projicientis et lineam TC′ (Fig. 2) manere eundem, erit d constans, et si admittamus valorem ipsius $l = 0,0005545$, ex prima aequatione acquisitum, esse justum valorem, fiunt reliquae aequationes:

$$0,0005545 . h = V\left(\frac{k}{a} - \frac{g}{a\rho^2 (R - \rho)}\right) + i,$$
$$0,0005545 . m = V\left(\frac{k}{a} - \frac{g}{a\rho^2 (R - \rho)}\right) - n,$$

ex quibus inveniuntur h et m; quibus inventis, et divisis per $\frac{180°}{\pi r' . Cos. \psi'}$ et $\frac{180°}{\pi r'}$, obtinentur *Cosinus* angulorum, quos linea directionis vis projicientis, facere debet cum lineis perpendicularibus C′e, C′f, ut corpus perveniat ad punctum quoddam orbitae lunaris, in quo viribus aequalibus afficitur, ideoque quiescit. Omittemus autem hunc calculum, quippe in finem propositum non inservit: vocemus tamen illos angulos α' et β'.

19. At, quamvis in casu praesenti, in quo corpus, in directione radii lunae, projicitur, velocitates simul non evanescant, ideoque praecedentes aequationes (E) simul inservire non possint ad valorem ipsius l determinandum, tamen illum valorem $l = 0,0005545$, quem ope primae aequationis (E) invenimus, adhibere possumus, et considerare tanquam verum valorem velocitatis, qua corpus telluris superficiem potest attingere. Nam vidimus, si $l = 0,0005545$, et si angulus inter directionem et inter lineam TC′ $= Arc . Cos. (d)$, corpus posse attingere punctum orbitae, in quo quiescit; vidimus etiam radium r tum fore $= 53,53203 . a$, ergo cum coördinatae r, ϕ, ψ a se invicem non pendeant, velocitates $\frac{\partial r}{\partial t}$, $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ in eo etiam a se invicem non pendent, quod velocitates $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ mutari non possunt velocitate $\frac{\partial r}{\partial t}$; id est anguli ϕ et ψ his velocitatibus tantummodo variantur, sed radius vector r ab illis mutari nequit: ergo mutatio ipsius r pendet a viribus, quae agunt in directione ejusdem radii, itaque, si vis $l . a = 0,0005545 . a$, (cum ejus directio ad lineas perpendiculares C′T, C′e, C′f, angulis *arc Cos.* (d), α', β', inclinata est,) tantum valeat, ut, postquam ex reactione lunae evanuerit, r factus sit $= 53,53203 . a$, efficiet eadem vis, ut corpus perveniat in idem punctum, in quo $r = 53,53203 . a$, etsi ejus directio coincidat cum radio C′L, quandoquidem in utroque casu haec directio, ad lineam sive ad radium TC′ co-

eodem angulo *arc. Cosin.* (d) inclinata est, ideoque ipsa vis in directione hujus radii eosdem praebet effectus.

Sumta igitur vi projiciente in directione radii C'L $= 0{,}0005545 . a$, haec vis ad tantam distantiam a tellure projiciet corpus, ut $r = 53{,}53203 . a$ sit; sed cum corpus illic pervenerit, anguli ϕ et ψ nulli non sunt, eamque ob causam erit functio

$\frac{(R \, Cos \, \phi \, Cos \, \psi - r)}{\sqrt{(R^2 - 2Rr \, Cos. \psi . \, Cos. \phi + r^2)^3}}$ minor, quam $\frac{(R - r)}{\sqrt{(R^2 - 2Rr + r^2)^3}}$; (in qua $Cos. \phi = Cos. \psi = 1$,) ergo in functione

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \frac{M}{r^2} + \frac{m \, (R \, Cos. \psi \, Cos. \phi - r)}{\sqrt{(R^2 - 2Rr \, Cos. \psi \, Cos. \phi + r^2)^3}}$$

erit hoc casu $\frac{M}{r^2}$, id est attractio telluris, major quam attractio lunae

$= \frac{m \, (R \, Cos \, \phi \, Cos. \psi - r)}{\sqrt{(R^2 - Rr \, Cos. \phi \, Cos. \psi + r^2)^3}}$; (quoniam, in casu $\phi = \psi = 0$, hae attractiones in puncto, quo $r = 53{,}53203 . a$, aequales sunt;) hinc sequitur: *vim projicientem*, $a . l = 0{,}0005545$, *in directione radii* C'L *agentem*, *projicere corpus ad distantiam a tellure* $= 53{,}53203 . a$, *ubi etiam majori intensitate agit tellus quam luna*, *ideoque ipsum corpus tandem versus superficiem suam trahit.*

Si igitur corpus, in directione radii lunae, e loco, cujus latitudo et longitudo, in superficie lunae, 45 gradus aequant, projectum, in telluris superficiem perveniat, oportet ut vis projectionis tantum valeat, quae ferat corpus quodcunque, uno temporis secundo, per spatium $0{,}0005545 . a = 3550$ metrorum, (ponatur autem hoc spatium $= 3600$ metris.)

Omnino quidem mihi proposueram generalem solvendi rationem, qua indeterminati fuissent projectionis angui; sed ob formam vel maxime implicatam, quae formulis omnibus tum fuisset propria, consilium statim mutavi; eoque magis hoc mihi licere arbitratus sum, cum nemo profecto est, qui dubitet, quin ita semper determinetur intensitas vis projicientis, quemadmodum eam nunc determinavimus, etiamsi alius esset locus projectionis, aliaque directio; ergo prima problematis pars soluta est.

I I.

20. Transeamus igitur ad temporis inventionem. Ponamus eam ob rem in formulis (7), (8), (9), loco l, ejus valorem determinatum, et reducamus formulas ipsas, quoad constantes quantitates; erit:

$(0{,}49659 \,.\, l + 0{,}000000341)^2 \,.\, a^2 - 0{,}6891312 \,.\, a = 0{,}000000079 \,.\, a^2 - 0{,}6891312 \,.\, a$
$= - 0{,}1870235 \,.\, a$;

$(0{,}47963 \,.\, l - 0{,}000000329)^2 - 0{,}0084129 \,.\, \frac{1}{a} = 0{,}0000000734 - 0{,}0084129 \,.\, \frac{1}{a} = 0{,}4587473 \,.\, \frac{1}{a}$;

$(0{,}67832 \,.\, l + 0{,}000000063)^2 - 0{,}0084129 \,.\, \frac{1}{a} = 0{,}0000001506 - 0{,}0084129 \,.\, \frac{1}{a} = 0{,}9503821 \,.\, \frac{1}{a}$;

fiunt igitur formulae (7), (8) et (9):

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \frac{9{,}81216 \,.\, a^2}{r} + \frac{0{,}1432432 \,.\, a^2}{\sqrt{(R^2 - 2Rr \,.\, Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)}} - 0{,}1870235 \,.\, a;$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 = \frac{8{,}2072302 \,.\, a^2}{r^2 \,.\, Cos.^2\psi \,.\, \sqrt{(R^2 - 2Rr \,.\, Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)}} + 0{,}4587473 \,.\, \frac{1}{a};$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{8{,}2072302 \,.\, a^2}{r^2 \,.\, \sqrt{(R^2 - 2Rr \,.\, Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)}} + 0{,}9503821 \,.\, \frac{1}{a};$$

vocemus autem $9{,}81216 = b$; $0{,}1432432 = c$; $0{,}1870235 = d$; $8{,}2072302 = e$; $0{,}4587473 = f$; et $0{,}9503821 = g$; reducamus omnes terminos ad fractiones ejusdem denominatoris; deinde fractiones illas invertamus: qua ratione obtinemus:

$$\partial t = \frac{\partial r \,.\, \sqrt{r} \,.\, \sqrt[4]{(R^2 - 2Rr\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)}}{\sqrt{((ba^2 - dar)\sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)} + ca^2 r)}};$$

$$\partial t = \frac{\partial \phi\ r \,.\, Cos.\,\psi\ \sqrt[4]{(R^2 - 2Rr\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)}}{\sqrt{(fr^2\ Cos.^2\psi \,.\, \sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)} + ea^2)}};$$

$$\partial t = \frac{\partial \psi\ r \,.\, \sqrt[4]{(R^2 - 2Rr\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)}}{\sqrt{(gr^2 \,.\, \sqrt{(R^2 - 2Rr\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)} + ea^2)}};$$

seu dividendo per $\sqrt[4]{(R^2 - 2Rr\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + r^2)} = \sqrt{(R \,.\, \sqrt{[1 - 2\frac{r}{R} Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + \frac{r^2}{R^2}]})}$:

$$\partial t = \frac{\partial r}{a \,.\, \sqrt{\left(\frac{b}{r} - \frac{d}{a} + \frac{c : R}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{r}{R}\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + \frac{r^2}{R^2}\right)}}\right)}}; \;\ldots\; (7)$$

$$\partial t = \frac{\partial \phi}{\sqrt{\left(f + \frac{ea^2 : R r^2\ Cos.^2\psi}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{r}{R}\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + \frac{r^2}{R^2}\right)}}\right)}}; \;\ldots\ldots\ldots\; (8)$$

$$\partial t = \frac{\partial \psi}{\sqrt{\left(g + \frac{ea^2 : R r^2}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{r}{R}\ Cos.\,\phi\ Cos.\,\psi + \frac{r^2}{R^2}\right)}}\right)}} \;\ldots\ldots\ldots\; (9)$$

21. Harum functionum hujus vel illius integratione, tempus transitus prorsus innotescet; sed variae analyseos methodi, quibus in hunc finem usus sum, nullum auxilium mihi praebuerunt; at, quamvis ipse sentiam, me hac in re ingenio deficere, tamen ex multis tentaminibus, quae institui, atque ex commentationibus virorum illustrium, quas consului, cogitatio orta est, qua dubitarem aliquantum, nullos adhuc repertos esse Analyseos fontes, e quibus talia hauriantur, quae nostras differentiales functiones apto et generali modo integras reddant. Nam ex ipsarum functionum attenta intuitione, clarissime patet, eas non pertinere ad tales functionum formas, quae praebeant integralem terminis definitam; neque ullo modo talem formam illis induere potui, quae huic proposito satisfaceret: quod maxime oriri videbatur e functione radicali $\sqrt{\left(1-2\frac{r}{R}Cos.\,\phi\,Cos.\,\psi+\frac{r^2}{R^2}\right)}$, in denominatoribus praesenti; revera talem quidem instituere possumus transformationem, qua quantitates irradicales abeunt; sed ipsi denominatores, quum ne quidem in quadratum quoddam converti possint, nisi mutentur quantitatum constantium rationes, ipsius integrationis difficultates haud levantur.

22. Quodsi nullo modo functionem quamdam differentialem, ad formam definitam integrare possimus, alia adhibetur methodus, scilicet, reductio in seriem convergentem, cujus singuli termini ad integralem, forma cognitam, pertinent; eaque methodus cum in casibus quampluribus summopere valeat, institui etiam hanc regulam in functiones superiores; sed haud majori fructu. Series enim adeo erant difficiles in applicatione, adeo lente convergebant, ut nullum certum judicium praeberent, quo de terminorum posteriorum magna convergentia non erat dubitandum: ut itaque tandem constituerim, curas omittere et e certamine decedere potius, quam aut opus, viribus humanis non perficiendum, aggredi, aut imperfectis et invalidis armis in arenam descendere: eoque magis hoc propositum valere coepit, quandoquidem, etiamsi series vel maxime conversissent, determinatio valorum ϕ et ψ extremo tempore, dubium aliquod relinqueret. Valor enim radii vectoris, finito tempore, (qui radius, aeque atque valores ϕ et ψ postulantur, ut integralis limites cognoscantur,) sponte innotescit, nam corpore in telluris superficiem pervento, distat ab ejus centro radium ipsius telluris, ergo hoc integralis limite est $r = a$; sed quinam sint valores angulorum ϕ et ψ eodem limite, prorsus fere latet, et non prius innotescit, quam integrales functionum (7), (8) et (9) inventae sunt. Probabile quidem est, hosce angulos in temporis fine esse nullos, id est, corpus jamjam versari in linea, centra telluris lunaeque jungenti, antequam in telluris superficiem pervenerit, sed certum judicium *a priori* non datur.

Si anguli ϕ et ψ in functione (7) non adessent, ideoque haec functio a sola variabili r ejusque differentiali ∂r penderet, accuratissime tempus t determinaretur, ope methodi integralium definitarum, (quam simili in casu praescribit POISSON, in *Traité de Mec.* Tom. I. pag. 345.) qua differentiales fiunt *differentiae*, et integratio fit *sommatio* sive

computatio; sed praeterquam quod haec methodus hic adhiberi nequeat, longior et molestior mihi videtur, quam quae applicetur.

23. Cum jam a proposito decessissem, denuo virorum Illustrium libros perscrutari animus erat: consului igitur, de casu praesenti, duo scriptiuncula Ill. LA GRANGE, alterum, quod invenitur in ejus opere celebrato *Mec. Anal.* Tom. I. pag. 108, alterum, quod insertum est in *Miscellaneis Taurinensibus*, Tom. IV. pag. 188. Inveni in hisce scriptis functionem differentialem temporis, (quae, cum *Vir Illustris* aliam secutus sit solvendi rationem, et cum ejus problema idem non fuerit atque nostrum, diversa est a nostra differentiali functione, sed tamen ad eandem fere formam reduci potest;) sed functio integralis non datur: via tantummodo monstratur, qua illa functio in casu vel maxime particulari posset integrari; hinc mihi venit in mentem, integrationem formulae generalis Viro Illustri difficilius visam esse, quam quae efficeretur; et cum nostra functio compositior etiam sit functione, a LA GRANGE data, haud temere facere mihi videbar, cum statuerim, functiones differentiales (7), (8) et (9) nullis recentioris analyseos auxiliis integrari posse.

Hac opinione adjutus, redii ad opus, jamjam relictum, et hanc responsionem Quaestionis Astronomicae, qualiscunque erat, et in quantum quaestioni satisfaciebat, *Virorum Clarissimorum* judicio submittere constitui; sed simul etiam mihi proposui, huic responsioni imperfectae, aliam adjungere problematis solutionem, magis autem particularem.

24. Initio hujus seculi noni decimi, multi magnique lapides in diversis Galliae regionibus, ex aëre atmospherico in terram decidebant; nemo doctus huic phaenomeno singulari, veram causam tribuere poterat; nullum phaenomenon physicum cognitum erat, quo tales lapides in ipso aëre atmospherico subito generari possent; et omnis Physices et Chemiae cognitio hanc hypothesin inter absurda potius ponebat. Montes vulcanici tales lapides sub tali angulo eructare possent, tanta vi, ut in aliam remotiorem regionem laberentur; sed praeterquam quod analysis chemica horum lapidum docuerit, earum naturam non convenire cum substantiis vulcanicis cognitis, etiam hanc hypothesin admittere non poterant docti, quoniam etiam tunc temporis nullae vehementes explosiones vulcanicae, neque in *Italia*, neque in *Sicilia* observatae sunt. Statuebant aut credebant igitur Physici, hos lapides, explosione quadam, e luna in tellurem esse ejectos. Calculabant ergo Mathematici, et inprimis Ill. DE LA PLACE et Cl. POISSON, quanta vi corpus quoddam e luna esset projiciendum, ut in tellurem perveniret, et quanto temporis huic cursui opus foret.

Eorum commentationes nullo modo inspicere potui, sed ex Ephemeride, cui titulus *Connaissance des temps*, A°. 1804. pag. 405, opinari coepi, POISSON, in sua commentatione, posuisse, corpus in tellurem pervenire motu rectilineo, neque igitur sub quodam angulo (quemadmodum nos posuimus,) projectum, sed in directione radii vectoris, de luna ad tellurem ducti. Loco enim laudato legitur; „POISSON invenisse: vim

vim projectionis tantam esse debere, ut corpus, primo temporis secundo, libere percurrat spatium 2300 metrorum"; nos invenimus spatium 3600 metrorum: unde igitur tanta differentia, nisi POISSON projectionis angulum multo minorem sumserit quam 45°, uti nos supra fecimus? Sed cum de angulo projectionis, loco citato, non loquatur, tacite, ut opinor, supponitur, illum angulum nullum esse; idque nunc paullo confirmare conabor sequenti solutione minus generali, in qua eandem sequar rationem, quam ipse POISSON praescribit, in suo opere *Traité de Mec.* I. pag. 294 et sqq.

III.

25. Ponamus igitur (Fig. 1), corpus e luna esse projectum, in directione radii vectoris TL, centra telluris et lunae jungentis; moveatur corpus, per totum motum, in hâc directione, et excludamus eam ob rem motum rotatorium ipsius lunae. Versetur corpus in puncto C″; sit TC″ $= r$, erit C″L $= R - r$, ideoque fit aequatio (1) (Vid. art. 7.) in casu praesenti:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{m}{(R-r)^2}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

quae praebet integralem:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \frac{2M}{r} + \frac{2m}{(R-r)} + C. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Si initio temporis, id est in puncto S, ponamus vim projicientem tantam, quae moveat corpus, primo temporis secundo, per spatium $a.l$, erit in hac origine; (in qua $r = R - SL = 60.a - \frac{3}{11}.a = 59\frac{8}{11}.a = \alpha$:)

$$a^2l^2 = \frac{2M}{\alpha} + \frac{2m}{R-\alpha} + C; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

unde $C = a^2l^2 - \frac{2M}{\alpha} - \frac{2m}{R-\alpha}$; et $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \frac{2M}{r} - \frac{2M}{\alpha} + \frac{2m}{R-r} - \frac{2m}{R-\alpha} + a^2l^2$;

in illo puncto, in quo corpus quiescit, id est ubi viribus aequalibus et directe oppositis afficitur, erit:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{M}{r^2} + \frac{m}{(R-r)^2} = 0; \text{ et } \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = \frac{2M}{r} - \frac{2M}{\alpha} + \frac{2m}{R-r} - \frac{2m}{R-\alpha} + a^2l^2 = 0.$$

Ex prima aequatione sequitur, $r = R.\sqrt{M} : (\sqrt{M} + \sqrt{m})$ = valori distantiae centrum T inter et punctum quietis; ex altera aequatione habetur:

$$a.l = \sqrt{\left(\frac{2M}{\alpha} - \frac{2M}{r} + \frac{2m}{R-\alpha} - \frac{2m}{R-r}\right)};$$

 quod-

quodsi in hac functione substituatur valor inventus ipsius r, obtinemus:

$$a.l = \sqrt{\left(\frac{2M}{a} + \frac{2m}{R-a} - \frac{2(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{R}\right)} \; \ldots\ldots (13)$$

Hac functione determinatur spatium, quod a corpore primo temporis secundo confici debet, ut tandem quiescat in C''; quod si in hac functione ponamus $M = 4{,}90608 . a^2$; $m = \frac{4{,}90608 . a^2}{68{,}5}$; $R = 60 . a$; $a = 59\tfrac{9}{11} . a$; $R - a = \tfrac{2}{11} . a$, eamque porro subjiciamus calculo, invenimus: $a . l = 1756$ metris. Si igitur hoc spatium paullo majus faciamus, v. c. $= 1800$ metris, corpus transgredietur punctum C'', ideoque, majori vi a tellure attractum, quam a luna, in telluris superficiem pervenire potest. Hicce valor multum quidem differt a valore, quem invenit POISSON, sed causam probabilem indicare mox conabimur.

26. Formula (11) nobis praebet invertendo et sub-duplicando:

$$\partial t = \frac{\partial r . \sqrt{(Rr - r^2)}}{\sqrt{(2MR + (2m - 2M + CR)\,r - Cr^2)}} \; \ldots\ldots (14)$$

De hac functione differentiali Cl. POISSON animadvertit, eam sub forma definita minime posse integrari; et si rite attendamus, patet, ejusdem devolutionem in seriem convergentem, nisi magnis difficultatibus, at certe magno labori adstrictam esse. Si denominatoris trinomium fuisset quadratum, facile absolveretur integratio; videamus igitur quinam valor ipsi quantitati C adsignandus sit, id est, videamus quanta sit intensitas vis projicientis, quae ipsi C talem praebet valorem, ut trinomium illud fiat quadratum.

In omni autem quadrato $x^2 - 2axy + a^2y^2$, est quadratum coëfficientis secundi termini aequale quadruplo primo termino, multiplicato per coëfficientem tertii termini, id est, $(2ax)^2 = 4a^2x^2$; ut igitur trinomium fiat quadratum, habeamus oportet:

$$(2m - 2M + CR)^2 = -8MCR;$$

(ponimus signum negativum, quoniam tertius trinomii terminus illo signo afficitur;) reducendo habemus:

$$R^2C^2 + 4(m - M).RC + 4(m - M)^2 = -8MRC;$$

sive $$R^2C^2 + 4(M + m).RC + 4(m - M)^2 = 0;$$

hinc invenitur: $$C = -\frac{2(\sqrt{M} \pm \sqrt{m})^2}{R}.$$

Substituatur hic valor in aequatione (12), quae tunc praebet has quantitates:

$$a.l = \sqrt{\left(\frac{2M}{a} + \frac{2m}{R-a} - \frac{2(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{R}\right)}; \text{ et } a.l = \sqrt{\left(\frac{2M}{a} + \frac{2m}{R-a} - \frac{2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{R}\right)}.$$

27. Prima aequatio praebet illum valorem vis projicientis, quo corpus attingit punctum quietis C'' (Conf. form. (13)); hoc valore adhibito, functio differentialis (14) fit integrabilis, sed cum integralis praebeat tantummodo illud temporis spatium, quo corpus utitur ad perveniendum e luna in punctum C'', illum valorem adhibere non possumus;

al-

alter valor multo est major, ejus ope eadem functio etiam est integrabilis, et cum hac majori intensitate impulsum, corpus certo per punctum quietis transire debeat, obtinemus etiam tempus totius cursus. Invenimus autem in hoc casu, $a.l = 1894 =$ fere $1900m$. Adest igitur inter hunc valorem atque illum, qui a POISSON inventus dicitur, differentia 400 metrorum; sed nescimus qualem quantitatem Ille massae ipsius lunae tribuerit; nos eam $= \frac{1}{68,5}$ massae telluris fecimus, sed ponitur nonnunquam $m = \frac{1}{58,7}.M$, et si hunc valorem admittamus, patet e formulis superioribus, spatium $a.l$ accedere ad 2100 metra; ignoramus insuper quantam fecit auctor distantiam, tellurem inter et lunam, et quantum radium telluris; nostro exemplo usi sumus media distantia et medio telluris radio; sed si maxima distantia et maximus telluris radius adhibeatur, majorem etiam metrorum numerum obtinere debemus, ita ut, quum variis hisce hypothesibus, spatium percursum propius etiam accedat ad numerum 2300, probabile aliquantum fit, POISSON, in suo calculo, angulum projectionis omisisse.

28. Admittamus igitur valorem $C = -\frac{2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{R}$, ex $a.l = 1894m$ ortum, eumque in formula (14) substituamus:

$$\partial t = \frac{\partial r.\sqrt{(Rr - r^2)}}{\sqrt{\left(2MR + (2m - 2M - 2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2).r + \frac{2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}{R}.r^2\right)}} =$$

$$\frac{\partial r.\sqrt{(Rr - r^2)}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{MR} - \frac{\sqrt{M}-\sqrt{m}}{\sqrt{R}}.r\right)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}R}.\frac{\partial r.\sqrt{(Rr - r^2)}}{R.\sqrt{M} - (\sqrt{M}-\sqrt{m}).r}$$

Ponatur $Rr - r^2 = r^2x^2$; erit $r = \frac{R}{1+x^2}$, et $\partial r = \frac{-2Rx\partial x}{(1+x^2)^2}$; habemus igitur subtsituendo: $\int\partial t = t = \sqrt{2R^3}.\int\frac{-x^2\partial x}{(1+x^2)^2}.\frac{1}{\sqrt{M}.x^2+\sqrt{m}}$; dividatur hic productus fractus, modo cognito, in duas alias fractiones, quarum denominatores sunt, $(1+x^2)^2$ et $\sqrt{M}.x^2+\sqrt{m}$; obtinemus:

$$t = -\frac{\sqrt{2R^3}}{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}\left(\int\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m}.x^2).\partial x}{(1+x^2)^2} - \int\frac{\sqrt{Mm}.\partial x}{\sqrt{M}x^2+\sqrt{m}}\right);$$

invenitur autem:

$$\int\frac{\sqrt{M}+\sqrt{m}x^2}{(1+x^2)^2}.\partial x = \int\left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{M}-\sqrt{m})\partial x}{1+x^2} - \frac{(\sqrt{M}-\sqrt{m})x^2\partial x}{(1+x^2)^2}\right) + \int\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{M}+\sqrt{m})\partial x}{1+x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{M}-\sqrt{m}).x}{1+x^2} + \tfrac{1}{2}(\sqrt{M}+\sqrt{m}).arc.\,tang.\,(x).$$

$$\int\frac{\sqrt{Mm}.\partial x}{\sqrt{M}x^2+\sqrt{m}} = \sqrt{Mm}\int\frac{\sqrt{\frac{1}{m}}.\partial x}{1+\sqrt{\frac{M}{m}}.x^2} = \frac{\sqrt{Mm}}{\sqrt[4]{Mm}}\int\frac{\sqrt{\frac{M}{m}}.\partial x}{1+\sqrt{\frac{M}{m}}.x^2} = \sqrt[4]{Mm}.arc.\,tang.\left(x.\sqrt[4]{\frac{M}{m}}\right)$$

erit

erit igitur integralis:

$$t = -\frac{\sqrt{2R^3}}{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}\left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{M}-\sqrt{m}).x}{1+x^2} + \tfrac{1}{2}(\sqrt{M}+\sqrt{m}).arc.tang.(x) - \sqrt[4]{Mm}.\right.$$

$\left. arc.\ tang.\left(x\sqrt[4]{\frac{M}{m}}\right)\right) + C$; restituatur in hac functione loco x ejus valor $\frac{\sqrt{(Rr-r^2)}}{r}$; determinetur deinde constans arbitraria C, ponendo $t = 0$ et $r = \alpha$; obtinemus tunc hanc integram temporis functionem:

$$t = \frac{\sqrt{2R^3}}{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}\left(\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{M}-\sqrt{m})}{R}.[\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)} - \sqrt{(a-a^2)}] + \right.$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{M}+\sqrt{m})\left[arc.\ tang.\left(\frac{\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)}}{\alpha}\right) - arc.\ tang.\left(\frac{\sqrt{(Ra-a^2)}}{a}\right)\right]$$

$$\left. - \sqrt[4]{Mm}\left[arc.\ tang\left(\frac{\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)}}{\alpha}\sqrt[4]{\frac{M}{m}}\right) - arc.\ tang.\left(\frac{\sqrt{(Ra-a^2)}}{a}\sqrt[4]{\frac{M}{m}}\right)\right]\right).$$

29. Numeris igitur absolvamus hanc formulam: est $R = 60.a$; $\alpha = 59\frac{8}{11}.a$; $M = 4,50658.a^2$; $m = \frac{4,90608.a^2}{68,5}$; hinc invenitur:

$$\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)} = 4,03881.a;\ \sqrt{(Ra-a^2)} = 7,68115.a;\ \text{ergo:}$$

$$\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)} - \sqrt{(Ra-a^2)} = -3,64234.a;$$

unde innotescit: $\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{M}-\sqrt{m})}{R}[\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)} - \sqrt{(Ra-a^2)}] = -0,0591075.a \ldots (E)$

$Log.\frac{\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)}}{\alpha} = 8,8300809 = Log\ tang.\left(\frac{\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)}}{\alpha}\right)$; ergo $arc.\ tang. = 3^\circ 52' 6'',61$; hic arcus mensura ipsius radii expressus aequivalet (=) 0,0675186.

Eodem modo invenitur, $arc.\ tang\left(\frac{\sqrt{(Ra-a^2)}}{a}\right) = 1,4415363$; ex quo habemus:

$$\frac{(\sqrt{M}+\sqrt{m})}{2}\left(arc.\ tang\left(\frac{\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)}}{\alpha}\right) - arc.\ tang.\left(\frac{\sqrt{(Ra-a^2)}}{a}\right)\right) = -1,7031016.a\ (I)$$

sic etiam obtinemus:

$$\sqrt[4]{Mm}\left(arc.\ tang\left(\frac{\sqrt{(R\alpha-\alpha^2)}}{\alpha}.\sqrt[4]{\frac{M}{m}}\right) - arc.\ tang.\left(\frac{\sqrt{(Ra-a^2)}}{a}.\sqrt[4]{\frac{M}{m}}\right)\right)$$

$$= -1,0262947.a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (K)$$

habemus igitur:

$$t = \frac{\sqrt{2R^3}}{(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}((E)+(I)-(K)) = \frac{a\sqrt{2.(60)^3.a}}{a^2(1,947345)}.(-0,7359144.a)$$

$$= -348385'' = 4^{dieb.} + 0^h + 53' + 45''.$$

Signum negativum inde oritur, quod coördinatarum origo opposita sit origini temporis, et cum tempus crescit, coördinata r diminuitur, ideoque alterum ratione alterius negativum est.

Cl.

Cl. POISSÓN invenit $t = 2\frac{1}{2}$ diebus; differentia igitur est unius diei et dimidii; sed attendendum est, nos adsumsisse spatium, a corpore prima temporis particula percursum, $=$ 1900 metris, cum vero ILLE posuerit 2300 metra.

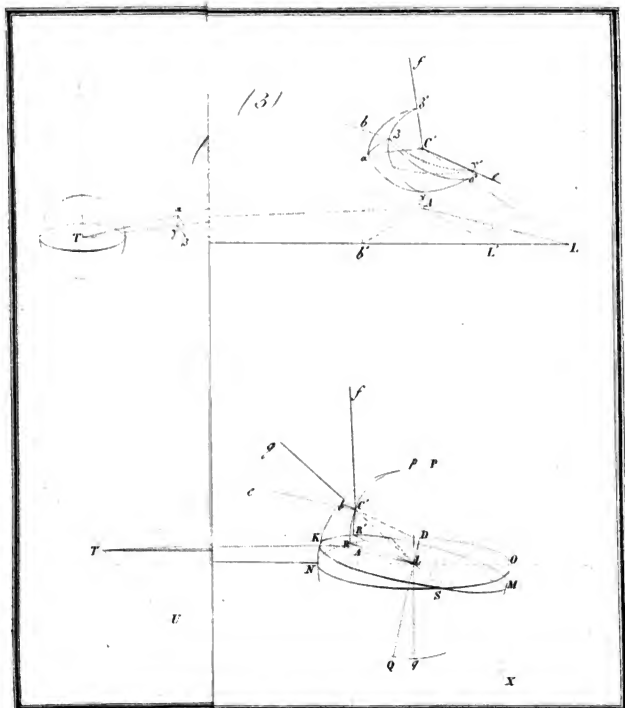
30. Patuit igitur ex nostro calculo: corpus, e luna projectum, tanta vi, ut primo temporis secundo percurrat 1900 metra, indigere 4 diebus, ad perveniendum e luna in tellurem, dummodo in directione de luna ad tellurem projiciatur, neque in suo cursu ex hac directione depellatur, neque aliquam patiatur resistentiam, veluti aëris atmospherici resistentiam, quam, aeque atque POISSON, prorsus omisimus.

Atque haec habui de problemate proposito, quae solvere potui; quae ut ita a VIRIS CLARISSIMIS postulentur summopere opto; tum enim nil mihi restat in praesenti, nisi ut EORUM in judicando indulgentiae, etiam atque etiam commendem hanc scriptiunculam, quam sentio esse levissimam et nulla laude dignam, si falso opinatus sim, de calculo Cl. POISSON, et si generalis illa solutio, quam instituere tentavi, absolvere autem non potui, imprimis postularetur.

SYMBOLUM.

Defui in magnis, nec tamen labor defuit nec cura.




(3)
f
8'
b
3
C'
a
7''
c
T
L
b'
L'
L
f
g
p
P
C
C'
R'
D
K
R
A
L
T
O
N
M
S
U
Q
q
X

3

Van den Schrijver

NIEUWE VERHANDELINGEN

DER

EERSTE KLASSE

VAN HET

KONINKLIJK-NEDERLANDSCH-INSTITUUT.

TIENDE DEEL.

VERHANDELING

OVER DE

HYPERBOLISCHE PARABOLOÏDE,

DOOR

G. J. VERDAM,
Hoogleeraar te Leiden.

TE AMSTERDAM, BIJ
C. G. SULPKE.
1843.

BIJDRAGE

TOT DE

MEETKUNDIGE BESCHOUWING

VAN DE

HYPERBOLISCHE PARABOLOÏDE.

DOOR

G. J. VERDAM.

§ I.

Voorafgaande herinneringen.

1. De *hyperbolische Paraboloïde* is een oppervlak van den *tweeden graad*, hetwelk, op meer dan ééne wijze, kan beschreven of voortgebragt worden, door de beweging eener *regte lijn*, of door de beweging eener *Parabola*, of ook door die eener *Hyperbola.*

2. Laat COD (*fig.* 1) eene parabola wezen, hebbende een parameter $= p$; AO zij de voorname as, en O de top. Het vlak dezer parabola zij een *horizontaal vlak.* Laat C′OD′ eene tweede parabola wezen, met een parameter $= p'$ getrokken of geconstrueerd in een *verticaal vlak*, hetwelk tevens door de as OAX van de eerste parabola gaat, zoodanig dat beide de parabolen hetzelfde toppunt O gemeen hebben, en derzelver

assen, hoezeer tegen gesteld gerigt, nogtans op dezelfde regte lijn B X gelegen zijn.

Wanneer nu ééne dezer parabolen, evenwijdig aan haar oorspronkelijk vlak, verplaatst wordt, en dat voortdurend hare as blijve in het vlak der tweede parabola, en hare top steeds in den omtrek van deze tweede parabola, alsdan zal er, door den omtrek der eerste parabola, een *gebogen*, *onbepaald* en *open* oppervlak beschreven worden, en dit oppervlak zal de *hyperbolische paraboloïde* wezen. De parabola, door welke het oppervlak beschreven wordt, heet *beschrijvende lijn;* de parabola, langs welker omtrek de beweging van de beschrijvende parabola plaats vindt, heet *rigtlijn.* Hoezeer de parameters dezer parabolen verschillen, zoo ontstaat er nogtans geene paraboloïde van eene andere afmeting, wanneer de *rigtlijn* genomen wordt als *beschrijvende lijn*, en de *beschrijvende lijn* als *rigtlijn.* Ook worden de vlakken der beide parabolen, alleenlijk tot gemak der beschouwing, en tot bepaling der denkbeelden, *horizontaal* en *verticaal* vooronderstelde; het beschreven oppervlak toch kan, noch in afmeting, noch in vorm, veranderen, wanneer de *volstrekte stand* van beide die vlakken verandert, indien slechts de *betrekkelijke stand* dezelfde blijft.

3. Dit oppervlak heeft *geen* middelpunt; hetzelve is *open*, doch *onafgebroken*, en heeft de figuur van twee regthoekig tegen elkander gerigte keelen of holle oppervlakken, bij O tegen elkander sluitende en zamenloopende. B O A is de *voorname as;* O de *top.* De bovengenoemde vlakken der beide parabolen zijn de twee *voorname middenvlakken.* Neemt men dezelve, benevens een derde vlak, gaande door den top O, en loodregt op de beide eerste staande, als coördinaten-vlakken; verder X O X′, Y O Y′ en Z O Z′ als assen van de coördinaten x, y en z, zoo is de vergelijking van de hyperbolische paraboloïde

$$pz^2 - p'y^2 + pp'x = 0,$$

uit welke vergelijking de navolgende bekende eigenschappen kunnen afgeleid worden.

4.

4. Elk plat vlak, evenwijdig aan de as O X gerigt, mits niet evenwijdig aan de straks nader te bepalen vlakken, — welke de *rigtvlakken* der paraboloïde genoemd worden, — zal het oppervlak snijden volgens eene parabola. De snijdingen, evenwijdig aan de vlakken X O Y en X O Z, zijn, waar ook genomen, *parabolen*, niet verschillende van de parabolen COD en C′O D′, gelijk dit ook uit de wording van het oppervlak voortvloeit (art. 2).

5. De doorsnijdingen, evenwijdig aan het vlak, Y O Z, dat is loodregt op de voorname as B O A, zullen gelijkvormige *hyperbolen* wezen, hebbende de dubbelde ordinaten der parabolen COD en C′O D′ tot ware voorname assen. Er ontstaan, op deze wijze, twee stelsels van hyperbolische snijdingen; het eerste stelsel ligt aan deze zijde, en het tweede stelsel ligt aan gene zijde van het vlak Y O Z; de rigtingen der takken, en der ware en denkbeeldige assen van de hyperbolen dezer beide stelsels zullen tegengesteld wezen, of liever regte hoeken maken, even zoo als de beide parabolen COD en C′O D′.

6. Het vlak Y O Z is een vlak, gaande door de lijnen O Y en O Z, welke de raaklijnen zijn der toppen van de voorname parabolische snijdingen COD en C′O D′; hetzelve is alzoo het raakvlak van den top der paraboloïde. Maar hetzelfde vlak is tevens een snijvlak; want het oppervlak wordt, in de rigting van dit vlak, gesneden volgens eene hyperbola, welker assen = 0 zijn, dat is volgens twee regte lijnen M O m, N O n, aan wederzijden van de assen O Y en O Z gelegen, en met dezelve *gelijke hoeken* makende. Daar nu alle de bovengenoemde hyperbolische snijdingen gelijkvormig zijn, en diensvolgens gelijke hoeken tusschen derzelver assen en asymptoten hebben, zoo is het gemakkelijk om in te zien, dat die hoeken niet kunnen verschillen van de hoeken M O Y = n O Y en M O Z = n O Z′. Daarom zullen de lijnen M O m en N O n de projectiën wezen, op het vlak Y O Z, van de asymptoten der hyperbolische doorsnijdingen, welke aan Y O Z evenwijdig loopen.

De vergelijkingen van die projectiën zijn $z = +y \sqrt{\frac{p'}{p}}$ en $z = -y \sqrt{\frac{p'}{p}}$.

7. Denkt men, door deze lijnen en door de voorname as B O A, twee vlakken, alsdan zullen deze vlakken, als loodregt staande op het vlak Y O Z, de projecterende vlakken van alle de genoemde asymptoten wezen. Zij zullen alle die evenwijdige asymptoten bevatten, en buiten de lijnen M O m en N O n geene punten met de hyperbolische paraboloïde gemeen hebben. Deze vlakken worden, in het vervolg, door de benaming van *asymptotische vlakken*, onderscheiden.

8. Gelijk het vlak Y O Z, — zijnde het raakvlak, dat door den top O gaat, — de paraboloïde snijdt volgens een stelsel van twee tegengesteld gerigte regte lijnen, even zoo zal de doorsnijding van elk ander vlak, rakende de paraboloïde in eenig ander punt van de voorname snijdingen C O D en C′O D′ (en derhalve loodregt op de vlakken dezer parabolen staande), uit een stelsel van twee tegengesteld gerigte regte lijnen bestaan. De projectiën dezer lijnen, op de vlakken X O Y en X O Z, zullen raaklijnen wezen tot de parabolen C O D en C′O D′, en derzelver projectiën op het vlak Y O Z zullen evenwijdig loopen aan de snijdingen M O m en N O n der asymptotische vlakken, terwijl de snijpunten van elke twee dier projectiën op de as O Y zullen gelegen wezen.

9. Die lijnen zelve, dat is alle die regtlijnige doorsnijdingen zullen daarom, hoezeer in verschillende vlakken gelegen, evenwijdig loopen aan de asymptotische vlakken. Waaruit dan voortvloeit, dat de *hyperbolische paraboloïde gedacht kan worden te bestaan uit een stelsel van aansluitende regte lijnen, welke aan een der asymptotische vlakken evenwijdig loopen.*

10. Door elk punt van dit oppervlak kunnen dan altijd twee regte lijnen getrokken worden, in het oppervlak zelve gelegen zijnde; de eene zal evenwijdig loopen aan het eene der asymptotische vlakken, de tweede lijn evenwijdig aan het tweede asymptotisch vlak. Alle die lijnen maken

twee

twee stelsels van lijnen uit; men kan dezelve *overeenstemmende stelsels*, of liever *wederkeerige stelsels* noemen.

11. Uit de vergelijking der paraboloïde, vereenigd met die der bovengenoemde snijdende raakvlakken, kan men opmaken, dat *geene twee lijnen van een zelfde stelsel elkander snijden*, dat is *niet* in hetzelfde vlak zijn gelegen, maar dat daartegen *alle de lijnen van een zelfde stelsel, door elke lijn van het wederkeerige stelsel zullen gesneden worden;* met andere woorden: twee lijnen, de eerste tot het eerste, de tweede tot het tweede stelsel behoorende, en waar ook genomen, liggen altijd in een zelfde vlak, dat nogtans wederom zal verschillen van het vlak, gaande door twee andere lijnen der beide stelsels.

12. Hieruit vloeit voort, hoedanig eene hyperbolische paraboloïde, door de beweging eener regte lijn, op tweederlei wijze, kan beschreven worden. De stand eener regte lijn is namelijk bepaald, wanneer zij twee andere lijnen, niet in een zelfde vlak gelegen zijnde, moet snijden, en tevens aan eenig gegeven vlak evenwijdig zijn. Men denke nu twee vlakken P en Q, en twee onbepaalde regte lijnen, m en m', niet in hetzelfde vlak gelegen zijnde, maar beide evenwijdig aan een der vlakken P of Q, b. v. aan het vlak Q; indien dan eene derde regte lijn n over de twee eerste m en m' zoodanig bewogen wordt, dat zij voortdurend evenwijdig blijve aan het andere vlak P, zal er een gebogen oppervlak ontstaan. Neemt men twee der lijnen, — hoedanige de lijn n ééne is, — welke evenwijdig aan het vlak P zijn getrokken of geconstrueerd, en beweegt men, over dezelve, eene der lijnen m of m', zoodat zij voortdurend evenwijdig blijve aan het vlak Q, alsdan ontstaat er eveneens een gebogen oppervlak. Beide deze oppervlakken zullen niet van elkander onderscheiden wezen; op eene der voormelde wijzen wordt dan het zelfde oppervlak geboren, en dit oppervlak zal eene *hyperbolische paraboloïde* zijn, *welker asymtotische vlakken evenwijdig loopen aan de vlakken* P *en* Q.

Deze vlakken dragen den naam van *rigtvlakken*, en zij kunnen we-

wederom door de benaming van *wederkeerige rigtvlakken* onderscheiden worden. De bewegende lijn, welke voortdurend aan een dezer vlakken evenwijdig blijft, heet *beschrijvende* lijn; de beide lijnen, over welke zij bewogen wordt, zijn *rigtlijnen*.

13. Men zegt, dat eene hyperbolische paraboloïde bepaald is, wanneer *twee rigtlijnen* en *één rigtvlak* gegeven zijn; want de beschrijvende lijnen, over deze rigtlijnen getrokken, zoodat zij alle evenwijdig zijn aan het rigtvlak, zullen geen ander oppervlak dan het pas genoemde kunnen formeren. Twee zoodanige beschrijvende lijnen als *rigtlijnen* aangenomen zijnde, en het vlak, aan hetwelk de beide oorspronkelijke rigtlijnen evenwijdig loopen, als *rigtvlak*, zoo ontstaat, met deze gegevens, hetzelfde oppervlak. Beide deze *wederkeerige stelsels* van beschrijvende lijnen, zijn klaarblijkelijk de stelsels, welke in art. 10 beteekend zijn.

14. Maar in plaats van twee rigtlijnen te nemen en een rigtvlak, kan men zich ook bepalen tot *drie rigtlijnen*, *mits deze aan een zelfde vlak* (dat in het eerste geval het *rigtvlak* zou wezen) *evenwijdig* loopen. Want vermits eenige beschrijvende lijn van een der stelsels alle de lijnen van het wederkeerige stelsel moet snijden (11), zoo zullen drie lijnen van dit stelsel moeten gesneden worden door alle de beschrijvende lijnen van het eerste stelsel. Deze drie lijnen nu loopen evenwijdig aan een der asymptotische vlakken, derhalve evenwijdig aan een zelfde vlak; en vermits de stand eener lijn, welke drie andere lijnen (in verschillende vlakken gelegen) snijdt, ten vollen bepaald is; zoo moeten alle de lijnen, door de drie pasgenoemde gaande, overeenkomen met de beschrijvende lijnen eener paraboloïde, zonder dat de overweging van een rigtvlak in aanmerking behoeft te komen.

15. Uit het eene en andere besluit men ook, dat de *hyperbolische Paraboloïde* behoort tot de *Regelvlakken*, en wel tot de *scheele Regelvlakken*, gelijk zij daarom meermalen een *scheel vlak* genoemd wordt; ook wel *Conoïde van den tweeden graad*. De *elliptische* of (men zou kunnen zeggen) *éénvlakkige Hyperboloïde* is mede een regelvlak, doch gee-

geene *Conoïde;* hetzelve is een *scheel vlak met drie willekeurige rigtlijnen;* de *Paraboloïde* is een *scheel vlak met twee rigtlijnen en een rigtvlak;* beide deze oppervlakken hebben overeenkomst, en het eerste gaat over in het tweede, zoodra de *rigtlijnen* niet meer willekeurig gelegen zijn, maar alle aan een zelfde vlak evenwijdig loopen.

16. De Paraboloïde, hier bedoeld, heeft dan ook, *als scheel regelvlak*, de eigenschap, dat elk vlak, gaande door eenige beschrijvende lijn, het oppervlak nog zal snijden volgens eene tweede regte lijn. Deze zal eene overeenkomstige of wederkeerige beschrijvende lijn zijn; beide zullen elkander in één punt snijden, en dit punt zal het punt zijn, in hetwelk de paraboloïde *aangeraakt* wordt door het platte *snijdende* vlak.

Het opnoemen van de overige eigenschappen en van andere bijzonderheden, betrekkelijk de *hyperbolische Paraboloïde*, ligt buiten het doel dezer herinneringen, welke de steller gemeend heeft, te moeten laten vooraf gaan, om veelvuldige aanhalingen, of verwijzingen tot geschriften over de *Ontbindende* en *Beschrijvende Meetkunst*, te vermijden.

---

§ 2.

Gewone constructie der Hyperbolische Paraboloïde.

1. Op de boven vermelde eigenschappen en beginselen berusten, in de beschrijvende Meetkunst, de constructie der *hyperbolische Paraboloïde*, de oplossingen der problemata betrekkelijk dit *scheele regelvlak*, en ook het onderzoek van deszelfs overige eigenschappen.

Laten A B en C D (*fig.* 2) twee regte lijnen zijn, in verschillende vlakken gelegen, en laten zij wezen de rigtlijnen eener *hyperbolische Pa-*

Paraboloïde. Over dezelve moet eene derde lijn A C zoodanig bewogen worden, dat deze voortdurend evenwijdig blijve aan zeker gegeven vlak. Hoedanig de stand van dit vlak zij, men denke, evenwijdig aan hetzelve, twee vlakken, gaande door twee willekeurige punten A en B van de lijn A B. Laten C en D de doorsnijdingen zijn van deze vlakken met de andere lijn C D. Vereenigende alsdan de punten A en C, B en D, zoo zijn A C en B D twee beschrijvende lijnen van de gedachte *paraboloïde*, en A B D C zal een zoogenaamde *scheele vierhoek* wezen, welks aangrenzende zijden, twee aan twee, in een zelfde vlak, doch welks overstaande zijden in verschillende vlakken zijn gelegen.

2. Het vlak van het papier zij het vlak der lijnen A B, B D. In dit vlak trekke men A E en D E evenwijdig aan B D en A B; daarna de lijn C E; alsdan is C A E een vlak, aan hetwelk B D evenwijdig loopt, en dit vlak zal derhalve evenwijdig loopen aan het *rigtvlak* der paraboloïde, of ook zelve *als rigtvlak* kunnen aangemerkt worden.

3. Nemende in de rigtlijn A B ergens een punt F, — trekkende, in het vlak A B D E, eene lijn F G evenwijdig aan B D, — verder uit G, in het vlak C E D, de lijn G H evenwijdig aan C E, en vereenigende F met H, zoo is F H eene andere beschrijvende lijn der paraboloïde, vermits het vlak F H G evenwijdig is aan het vlak C E A. Op dezelfde wijze construeert men zoovele beschrijvende lijnen als noodig is, om het beloop der scheele oppervlakte voor te stellen, en het zelfde beginsel dient ook voor het geval, als men zich van twee regthoekige projectie-vlakken bedient.

4. Omdat alle paren van lijnen, welke, in de ruimte, getrokken zijn, door evenwijdige vlakken gesneden worden in evenredige deelen, zal men hebben A B : B F = C D : H D, of A F : B F = C H : D H. Derhalve *zullen de rigtlijnen eener hyperbolische paraboloïde, door de opvolgende beschrijvende lijnen*, steeds *in evenredige stukken of deelen verdeeld worden.* Omgekeerd zal er, wanneer men op twee lijnen A B en C D, welke niet in een zelfde vlak gelegen zijn, punten neemt, welke

de-

deze lijnen in onderling evenredige deelen verdeelen, en dat men, door de overeenstemmende punten, lijnen trekt, door deze laatste een *scheel vlak* gevormd worden, en dit regelvlak zal eene *Hyperbolische Paraboloïde* wezen. De gewone, meer geschikte, constructie der hyperbolische paraboloïde wordt hieruit afgeleid.

5. De pasgenoemde lijnen vormen een stelsel van beschrijvende lijnen. Neemt men twee van dezelve, b. v. AC en BD, laat men, door eenig punt I, een vlak ILK gaan, evenwijdig aan het vlak CED, aan hetwelk ook AB evenwijdig loopt, en vereenigt men I met het punt K, in hetwelk genoemd vlak door de lijn BD gesneden wordt, alsdan bewijst men gemakkelijk, dat de snijding PM der vlakken IKL en FGH evenwijdig zal zijn aan de snijding CE der vlakken CED en ACE, en dat de lijnen FH en IK elkander in een punt P zullen snijden. Ook hier worden AC en BD, in de punten I en K *evenrediglijk* gedeeld, zoodat, als AC en BD aangemerkt worden als *rigtlijnen*, IK eene *beschrijvende lijn* der *hyperbolische paraboloïde* zal wezen, en deze, volgens hetgeen in § 1 is ontwikkeld, niet onderscheiden zijnde van de paraboloïde, welke AB en CD tot rigtlijnen heeft, zoo moet IK ééne der *wederkeerige beschrijvende lijnen* zijn.

6. *De* hyperbolische paraboloïde *wordt derhalve gevormd door een der stelsels van regte lijnen, welke twee overstaande zijden eens* scheelen vierhoeks *in evenredige deelen verdeelen.* De vier punten F, K, H, I, in welke de vier zijden van dezen vierhoek door eenige lijn van het eerste stelsel, en door eene andere van het tweede stelsel, gesneden worden, liggen altijd in een zelfde vlak, en die lijnen zelve moeten elkander in een punt P snijden.

§ 3.

Constructie der hyperbolische paraboloïde bij eene meer algemeene bepaling en voorstelling van den scheelen vierhoek, welks overstaande zijden als rigtlijnen der Paraboloide aangenomen worden.

1. Gewoonlijk verbeeldt men zich den scheelen vierhoek zoo als in *fig.* 2 is voorgesteld. Doch men kan de zaak algemeener beschouwen, en uit die beschouwing eenige gevolgen afleiden, welke tot dusverre niet schijnen opgemerkt te zijn. Want indien men een scheelen vierhoek bepaalt, als te bestaan uit *vier* lijnen, elkander, twee aan twee, snijdende, en vereenigende *vier* punten, welke niet in hetzelfde vlak gelegen zijn, alsdan is de orde dezer vereeniging geheel willekeurig. De vier punten a, b, c, d zijnde, zal men, op de gewone wijze, a met b, b met c, c met d, d met a vereenigen; doch men kan ook a met b vereenigen, b met d, d met c, c met a, of a met c, c met b, b met d, d met a; in alles heeft men alsdan $4\ (4-1):2 = 2 \cdot 3 = 6$ lijnen, welke, in de projectie op eenig vlak, overeenstemmen met de vier zijden en de twee diagonalen van een *vlakken vierhoek*, of met de *projectiën der* 6 *ribben van eene driehoekige pyramide*, welker 4 hoekpunten met de 4 gegevene punten instemmen.

2. Op eene der pasgenoemde wijzen wordt nu de scheele vierhoek voorgesteld door ABDC (*fig.* 3), zoodat, vergeleken met den vierhoek van *fig.* 2, de zijden AC en BD hier zijn, hetgeen, bij de gewone voorstelling, diagonalen *schijnen.* In het wezen der zaak toch heeft een scheele vierhoek *geene diagonalen;* wil men echter deze benaming niet verwerpen, alsdan zullen, bij de voorstelling *fig.* 3, de lijnen AD en BC *diagonalen* moeten heeten, welke in *fig.* 2 als *zijden* beschouwd worden.

3.

3. Om nu evenwel, door de evenredige verdeeling van twee overstaande zijden, de paraboloïde te construeren, moeten de deelpunten van AB en CD in tegengestelde rigtingen gerekend worden. Want AB en CD de rigtlijnen zijnde, zullen AC en BD twee beschrijvende lijnen zijn, en opdat de beschrijvende lijn AC, uit den stand AC kome in den stand BD, moet hare beweging klaarblijkelijk zoodanig plaats hebben, dat, terwijl het bovendeel of boveneinde A voortgaat van A naar B, van de linker- naar de regter-zijde, het beneden-deel of beneden-einde C terug gaat van C naar D, van de regter- naar de linker-zijde.

4. Men verdeele b.v. AB en DC (*fig.* 4), elk in 10 gelijke deelen, doch in tegengestelde rigtingen, en vereenige de overeenkomstige deelpunten, zoo verkrijgt men de voorstelling der paraboloïde. En wanneer AB en CD, op het vlak van het papier, de projectiën der rigtlijnen voorstellen, zullen de beschrijvende lijnen, mede in projectie voorgesteld, raaklijnen zijn eener parabola B'XYC', de projectie zijnde van eene der *convex-concave zijden* der *hyperbolische paraboloïde.* Deze constructie der parabola B'XYC', welke een onmiddelijk gevolg is van de constructie der hyperbolische paraboloïde, is overigens van elders bekend.

5. Men kan ook de voorgestelde wording en constructie der paraboloïde volgen als de meest geschikte, om zich van het ware beloop dezer oppervlakte een juist denkbeeld te vormen, hetzij door middel van gespannen draden, hetzij door middel van eene horizontale en verticale projectie op twee projectie-vlakken.

Men denke, tot dat einde, door elke rigtlijn een der projectievlakken, of neme dezelve willekeurig, zoodat de eerste AB (*fig.* 5) ligge in het *verticale vlak*, de tweede CD in het *horizontale vlak.* Neemt men bovendien den stand en de lengte dezer lijnen in dier voege, dat de *projectie-as* OX door de beide eindpunten A en C ga (waardoor het gedeelte AC dezer as eene diagonaallijn en eene beschrijvende lijn van den scheelen vierhoek ABDC wordt), en dat de perpendiculairen, uit A en C op OX getrokken, door de eindpunten D en B loopen, alsdan is

is de constructie der paraboloïde allereenvoudigst. Want men verdeele AC, en daardoor ook AB en CD, in een zeker aantal gelijke deelen, neme dezelve op DC en CA, op BA en AC, in eene omgekeerde orde, en vereenige de gelijknamige deelpunten van DC en CA, en van BA en AC, door lijnen. Deze lijnen zullen de projectiën wezen der beschrijvende lijnen van de *paraboloïde*, en wanneer men de figuur geteekend hadde op twee regthoekige vlakken, alsdan zou men slechts de gelijknamige deelpunten van AB en CD, door gespannen draden, behoeven te vereenigen, om die beschrijvende lijnen zelve voor te stellen, en met dezelve tevens de juiste configuratie van het *scheele vlak*, welks beide tegengestelde *convex-concave* zijden, door de beide projectiën (*fig.* 5) volkomen zigtbaar zijn. Bij het volgen der constructie, verklaard in § 2 (*fig.* 2), is zulks altijd het geval niet, omdat men, door dezelve, veeltijds slechts een klein gedeelte van het oppervlak eener paraboloïde van grootere afmeting kan voorstellen; ten minsten zal dit gedeelte dikwijls klein zijn in vergelijking van dat, tot hetwelk de nu verklaarde constructie kan uitgestrekt worden.

6. Om de beschrijvende lijnen van het wederkeerige stelsel te construeren (*fig*, 3), moet men twee der beschrijvende lijnen van het eerste stelsel nemen als *rigtlijnen* (§ 1, art. 12), b. v. de zijden AC en BD van den scheelen vierhoek. Maar nu moet men de evenredige deelen op deze lijnen wederom in dezelfde rigting nemen, dat is van A naar C en van B naar D, omdat AB en CD zelve beschrijvende lijnen van dit tweede stelsel zijn.

7. Alle de lijnen van een der beide stelsels moeten evenwijdig loopen aan een zelfde vlak (§ 1, art. 12), het *rigtvlak* der paraboloïde zijnde. Voor de lijnen van het eerste stelsel, hebbende AB en CD tot *rigtlijnen*, zal het rigtvlak b. v. een vlak zijn, gaande door BD, en evenwijdig loopende aan AC. Nu ligt AC in het vlak der lijnen AB en BC; trekkende alzoo in dit vlak (dat gedacht kan worden het vlak des papiers te zijn, *boven* hetwelk dan de lijnen AD, BD, CD zich uitstrek-

strekken), door het punt B, de lijn X B Y, evenwijdig aan A C, zoo is het vlak X Y... D B evenwijdig aan het rigtvlak, en kan ook zelf als *rigtvlak* aangemerkt worden. X Y zal de doorsnijding van dit rigtvlak met het vlak des papiers wezen.

8. Het rigtvlak der beschrijvende lijnen van het tweede stelsel moet een vlak wezen, evenwijdig loopende aan A B en C D. Trekkende daarom, in het vlak A B C, door het punt C, eene lijn Z C Y, evenwijdig aan A B, alsdan zal het vlak der lijnen C D... Z Y evenwijdig loopen aan het begeerde rigtvlak, of dat *rigtvlak* zelve zijn. Z Y zal de snijding van dit vlak met dat van het papier wezen; deze snijding heeft, met de snijding X Y van het eerste of wederkeerige rigtvlak, het punt Y gemeen, bovendien snijden B D en C D elkander in D; derhalve zijn Y en D twee punten, tot elk der vlakken behoorende; daarom zal D Y de voorstelling wezen van de snijding der beide rigtvlakken, en aan deze lijn D Y moet de voorname as der paraboloïde evenwijdig loopen (§ 1, art. 7 en 12).

9. Door deze constructie, welker uitvoering op twee projectie-vlakken zeer eenvoudig is, leert men dan de stelling der rigtvlakken, en de *evenwijdige rigting* der voorname as van de hyperbolische paraboloïde kennen, wanneer daartoe twee rigtlijnen en twee beschrijvende lijnen, dat is twee beschrijvende lijnen van elk der stelsels, gegeven zijn. (In *fig.* 2 is C E de pas genoemde *rigting.*)

---

§ 4.

Constructie van het toppunt, van de voorname as, en van de parameters eener hyperbolische paraboloïde.

1. Volgens het ontwikkelde in § 3 kan men de rigtvlakken eener

 hy-

hyperbolische paraboloïde construeren, wanneer twee der beschrijvende lijnen van de beide stelsels van beschrijvende lijnen gegeven zijn, of wel, indien men een der scheele vierhoeken kent, welke, in het oppervlak der paraboloïde, door de vereeniging van twee beschrijvende lijnen met derzelver wederkeerige ontstaan. Daar nu het raakvlak van den top der paraboloïde loodregt staat op de voorname as (§ 1, art. 6), en deze laatste evenwijdig loopt aan de snijding der beide rigtvlakken, zal elk vlak, loodregt door deze snijding gaande, evenwijdig aan genoemd raakvlak loopen. Dit raakvlak bevat de snijdingen der asymptotische vlakken (ibid, art. 6 en 7), en deze snijdingen moeten daarom evenwijdig loopen aan de snijdingen der beide rigtvlakken met het zoo even genoemde loodregte vlak. Kan men nu de beschrijvende lijnen construeren, welke evenwijdig aan deze snijdingen loopen, alsdan zullen deze noodwendig overeenstemmen met de snijdingen van de asymptotische vlakken en van het raakvlak, gaande door den top. Het vlak dier beschrijvende lijnen zal derhalve van dit raakvlak niet onderscheiden wezen; derzelver doorsnijdingspunt zal het toppunt der paraboloïde zijn, en de voorname as is de lijn, door dit toppunt, evenwijdig aan de gemeenschappelijke doorsnijding der beide rigtvlakken getrokken.

2. De constructie van een vlak, loodregt door eene lijn gaande, is uiterst gemakkelijk. Men denke zoodanig vlak, gaande b. v. door het punt B (*fig.* 3) en loodregt staande op de gemeene doorsnede D Y van de beide rigtvlakken. Laten B M en M N de snijdingen van dit perpendiculaire vlak met de beide rigtvlakken zijn, alsdan zijn deze de lijnen, aan welke de beschrijvende lijnen, gaande door den top der paraboloïde, evenwijdig moeten loopen.

3. Om dezelve te construeren, zoo bedenke men, dat, ten opzigte van het rigtvlak X Y... B D, de rigtlijnen van de paraboloïde zijn A B en C D, en dat men B D en A C als rigtlijnen moet aanmerken, indien men het vlak Z Y... C D als rigtvlak beschouwt. Om dan de *beschrijvende lijn te construeren*, gaande over A B en C D, en evenwijdig loopen-

pende aan BM, zoo denke men, door AB en BM, een vlak; hetzelve zal de rigtlijn CD in een punt P snijden, en PQ, in het vlak ABMP, evenwijdig aan BM getrokken, zal de beschrijvende lijn zijn, welke evenwijdig aan BM loopt. Omdat ZY evenwijdig is aan AB, zal de lijn MP, volgens welke het rigtvlak DYCZ gesneden wordt door het vlak ABMP, evenwijdig loopen aan ZY en AB; hierdoor wordt de bepaling van het punt P zeer gemakkelijk. Trekkende vervolgens, door C, eene lijn C*m*, evenwijdig aan de snijding NM (en alzoo gelegen in het vlak DYCZ), daarna, in het rigtvlak DBY, de lijn *m*R evenwijdig aan BY, en door het snijpunt R dezer lijn met de rigtlijn BD, eene lijn RS, in het vlak AC*m*R, en evenwijdig aan MN of C*m*, alsdan is RS die beschrijvende lijn van het wederkeerige stelsel, welke evenwijdig aan de snijding MN loopt. De lijnen PQ en RS liggen nu in het raakvlak van den top der paraboloïde; zij snijden elkander in het punt T; dit punt zal het *toppunt* der paraboloïde wezen; TU, evenwijdig aan DY, door het punt T getrokken, zal *de voorname as* zijn. Het zal, in § 7, blijken, dat de rigting TU, en gevolgelijk ook de snijding der rigtvlakken, evenwijdig loopt aan de regte lijn, welke het midden van AD met het midden van BC vereenigt. (1)

4.

(1) Men zou kunnen vragen of de lijnen PQ en RS niet juist invielen met de kortste afstanden van de overstaande rigtlijnen AB, CD en AC, BD. Dit kan alleenlijk dan plaats hebben, wanneer de rigtvlakken toevallig of voorwaardelijk evenwijdig aan die kortste afstanden loopen. Dit is b.v. het geval, wanneer een der rigtvlakken loodregt op eene der rigtlijnen staat; alsdan staat het wederkeerige rigtvlak ook loodregt op het eerste, en de paraboloïde zal wezen eene zoogenaamde *regte conoïde van den tweeden graad;* de beide parameters p en p' van zoodanige paraboloïde zijn even groot of gelijk, en de asymptotische vlakken maken, met de voorname middenvlakken, hoeken van 45°. Hetzelfde heeft nog plaats, en er wordt eveneens eene *regte conoïde* gevormd, wanneer men *twee rigtlijnen* neemt *van gelijke lengte, met derzelver midden regthoekig over elkander liggende.*

4. Er blijft nog overig om de parameters, dat is de afmeting der paraboloïde, te construeren.

Vermits de lijnen PQ en RS, door de constructie van het toppunt en der voorname as verkregen, overeenstemmen met de lijnen; welke, in fig. 1, zijn aangewezen door MO*m* en NO*n*, zoo is het duidelijk dat, construerende een vlak, gaande door TU, en deelende den hoek QTR (het supplement van den hoek BMN der rigtvlakken) midden door, dit vlak een der voorname middenvlakken der paraboloïde zal moeten zijn. Het tweede voorname middenvlak deelt den hoek RTP of QTS midden door, of wordt verkregen, door op het eerste vlak een perpendiculair vlak te stellen, dat tevens door TU gaat. De constructie dezer middenvlakken, door de hulpmiddelen der beschrijvende Meetkunst, houdt geene moeite in. Daar nu, in het vlak der lijnen PQ en RS, de vergelijking van dezelve, ten opzigte der regthoekige assen, welke derzelver hoeken midden door deelen, is

$$z = y \sqrt{\frac{p'}{p}}$$

(§ 1, art. 6), — en de coëfficient van *y* tevens moet overeenkomen met de *trigonometrische tangens* van den hoek, tusschen de as van *y* en de onder en boven dezelve liggende lijnen, — en verder nog die hoek gelijk is aan de helft des hoeks, welke genoemde lijnen maken, dat is $= \frac{1}{2}$ hoek QTR, zoo heeft men de gelijkheid

$$Tang\ \tfrac{1}{2}\ \mathrm{QTR} = \sqrt{\frac{p'}{p}}.$$

5. Men construere derhalve den hoek BMN, welke de beide rigtvlakken met elkander maken, en neme de helft van deszelfs supplement. Zij BAC (*fig.* 6) dat halve supplement; — neem AB willekeurig, BC loodregt op AB, en BD loodregt AC, zoo is de verhouding tusschen de segmenten CD en AD gelijk aan de verhouding, tusschen BC_2 en AB^2, dat is gelijk aan $Tang^2$ BAC $= tang^2\ \frac{1}{2}$ QTR (in fig. 3) $= \frac{p'}{p} =$ *de*

ver-

verhouding tusschen de parameters van de paraboloïde. Men vindt, zoo doende, de *betrekkelijke afmeting* van de paraboloïde.

6. Om de volstrekte afmeting te weten, bepale men de doorsnijding van een der in art. 4 geconstrueerde middenvlakken met eene der beschrijvende lijnen, b. v. (*fig.* 3) de doorsnijding van AC met het middenvlak, dat den hoek QTR midden door deelt. Men rabattere dit middenvlak op het horizontale projectie-vlak. In hetzelve heeft men nu de as TU, den top T, en een punt (namelijk het bepaalde doorsnijdingspunt met AC) der overeenkomstige voorname parabolische snijding; weshalve de parameter p van deze parabola onmiddelijk zal kunnen geconstrueerd worden. De parameter p' wordt door de verhouding AD : CD (*fig.* 6) bekend, of door eene herhaling van dezelfde constructie op het middenvlak, hetwelk den hoek QTS (*fig.* 3) midden door deelt.

---

§ 5.

Beschouwing der twee *paraboloïden, welke ontstaan door de onafgebrokene beweging eener regte lijn over de vier zijden van een scheelen vierhoek.*

1. Behalve den scheelen vierhoek ABDCA (*fig.* 3), welks zijden zijn de lijnen AB, CD, AC en BD, kan men nog in aanmerking nemen de beide vierhoeken ADBCA en ABCD, hebbende tot zijden de lijnen AD, BC, AC, BD en AB, BC, CD, DA. Men vestige hier de aandacht op den eersten dezer vierhoeken, dat is op den vierhoek ADBCA. Neemt men aan, dat de overstaande zijden AD en BC rigtlijnen eener hyperbolische paraboloïde zullen wezen, zoo moet AC of BD, b. v. BD, de beschrijvende lijn zijn, en deze moet van B naar C en van D naar A bewogen worden. Van de paraboloïde, op deze wijze beschreven, zullen

dan AC en BD twee beschrijvende lijnen zijn; maar de paraboloïde, hebbende AB en CD tot rigtlijnen (en welke in de voorgaande §§ beschouwd is) heeft ook diezelfde lijnen AC en BD tot beschrijvende lijnen; *derhalve zullen deze paraboloïden elkander volgens de twee lijnen* AC *en* BD *snijden*. Het vlak, aan hetwelk de beschrijvende lijnen AC en BD evenwijdig loopen, zal *het gemeenschappelijke rigtvlak* der beide paraboloïden zijn.

2. Maar deze oppervlakken zullen elkander nog volgens eene *derde regte lijn* snijden, en deze zal wezen *de lijn, welke het midden van* AC *met het midden van* BD *vereenigt*. Want van de paraboloïde, hebbende AD en BC tot rigtlijnen, worden de wederkeerige beschrijvende lijnen geconstrueerd, door AC en BD als rigtlijnen aan te nemen, en tot rigtvlak het vlak, aan hetwelk AD en BC evenwijdig loopen. De evenredige deelen op deze rigtlijnen moeten genomen worden van A naar C en van D naar B, of van B naar D en van C naar A. Van de eerst beschouwde paraboloïde werden de wederkeerige beschrijvende lijnen geconstrueerd, door dezelfde lijnen AC en BD als rigtlijnen aan te nemen, en tot rigtvlak het vlak, aan hetwelk AB en CD evenwijdig loopen, terwijl de overeenkomstige deelpunten genomen werden van A naar C en van B naar D. De beide paraboloïden hebben derhalve, volgens de eerste wijze van wording (art. 1), *verschillende rigtlijnen* AB, CD en AD, BC, en *een zelfde rigtvlak*, doch, volgens de wederkeerige beschrijving, *verschillende rigtvlakken* en *dezelfde rigtlijnen* AC, BD. Men zou dezelve *overeenstemmende, zamengevoegde paraboloïden* kunnen noemen. Verdeelt men nu AC en BD elke in *n* gelijke deelen (*n even* en zeer groot zijnde), zoo is het duidelijk, dat wanneer men AB als beschrijvende lijn laat voortgaan over de rigtlijnen AC en BD, en verder ook BC, als beschrijvende lijn, over dezelfde rigtlijnen, elke deze lijnen AB en BC wel een verschillend oppervlak zullen beschrijven, maar toch ergens in den stand zullen moeten komen, in welken zij dezelfde overeenkomstige deelpunten van AC en BD vereenigen. Die overeenkomstige deel-

deelpunten kunnen geene andere wezen dan de $\frac{1}{2}n^e$ deelpunten, welke tevens de middenpunten van AC en BD zijn. De lijn derhalve, welke het midden van AC vereenigt met het midden van BD is eene beschrijvende lijn, zoowel van de eerste als van de tweede paraboloïde, en alzoo *eene derde lijn, volgens welke die beide paraboloïden elkander snijden.*

3. Men kan het ontwikkelde in art. 1 en 2 op de navolgende wijze uitdrukken. Laat ABCD (*fig.* 3) een scheele vierhoek zijn. Over deszelfs overstaande zijden AB en CD late men eene regte lijn AC, van A naar B, en van C naar D, zoodanig bewegen, dat zij van AB en CD evenredige deelen afsnijdt. Wanneer nu de beweging dezer lijn, nadat zij in den stand BD gekomen is, op dezelfde wijze voortduurt over de tegenoverstaande zijden AD en BC, totdat zij gekomen is in den stand CA, overeenkomende met den oorspronkelijken stand AC, alsdan worden er twee verschillende hyperbolische paraboloïden gevormd of voortgebragt, welke *een gemeenschappelijk rigtvlak* zullen hebben, of, ten aanzien van derzelver wederkeerige beschrijvende lijnen, *twee gemeenschappelijke rigtlijnen*; en deze paraboloïden zullen elkander volgens drie regte lijnen snijden. *Twee dezer lijnen zullen* beschrijvende lijnen *van het eerste stelsel wezen en tevens* diagonalen *van den scheelen vierhoek; de derde lijn zal tot het* tweede stelsel *moeten behooren, en zij zal de lijn wezen, welke* door het midden der diagonalen *van den vierhoek gaat.*

4. Beschouwt men de beide oppervlakken als begrensd tusschen de vier zijden van den scheelen vierhoek en tusschen de beide snijlijnen AC en BD, alsdan kan men dezelve (ingevolge de onafgebrokene beweging der beschrijvende lijn AC) aanmerken als deelen van een enkel oppervlak, volgens de lijnen AC, BD, even als volgens twee *keerlijnen*, aan en tegen elkander sluitende.

5. De uitgedrukte eigenschap is niet beperkt tot het geval der beschouwing van een bepaalden scheelen vierhoek; zij is algemeen. En men kan in de daad gemakkelijk inzien, dat twee hyperbolische para-

 bo-

boloïden, welke *dezelfde rigtlijnen* maar *onderscheidene rigtvlakken* hebben, elkander, *behalve volgens die rigtlijnen*, ook *nog volgens eene derde lijn* zullen moeten snijden, en de wederkeerige beschrijvende lijnen dezer paraboloïden zullen een *gemeenschappelijk rigtvlak* hebben.

6. Eene paraboloïde, hebbende twee regte lijnen *a* en *b* tot rigtlijnen en een plat vlak P tot rigtvlak, zal derhalve met eene andere paraboloïde, hebbende mede *a* en *b* tot rigtlijnen, maar een andere vlak P′ tot rigtvlak, eene beschrijvende lijn *gemeen* moeten hebben. Eene derde paraboloïde, hebbende een rigtvlak P″, maar wederom dezelfde rigtlijnen *a* en *b*, zal ook met de eerste paraboloïde eene beschrijvende lijn gemeen hebben, en deze beschrijvende lijn zal noodwendig moeten verschillen van die, welke aan de beide eerste paraboloïden gemeen is. Zoo voort redenerende komt men tot de gevolgtrekking, dat elke beschrijvende lijn van de eerste paraboloïde zal kunnen aangemerkt worden als eene der beschrijvende lijnen eener andere paraboloïde, welke met de eerste dezelfde rigtlijnen gemeen heeft. Derhalve zullen ook de oneindig vele paraboloïden, welke door twee regte lijnen gaan, met *éene van dezelve* eene beschrijvende lijn gemeen hebben; nogtans merke men *die éene paraboloïde* niet aan als de *enveloppe* of het omwikkelend oppervlak van alle de overige, want er heeft geene *aanraking*, maar wel *snijding van oppervlakken* plaats.

7. Er is geene beschrijvende lijn van de paraboloïde, hebbende AB en CD tot rigtlijnen, welke niet gesneden wordt door eenige beschrijvende lijn van de paraboloïde, hebbende AD en BC tot rigtlijnen. Want beide de paraboloïden hebben de wederkeerige beschrijvende lijn, gaande door het midden van AC en BD. Door elk punt dezer lijn kan, in elke paraboloïde, eene beschrijvende lijn van het eerste stelsel getrokken worden. Gevolgelijk snijden die twee beschrijvende lijnen elkander in genoemd punt, en *de gemeenschappelijke wederkeerige beschrijvende lijn is derhalve* de plaats van de snijpunten *der beschrijvende lijnen van het eerste stelsel* der eerste paraboloïde, *met eenige overeen-*

kom-

komstige beschrijvende lijn van het eerste stelsel der tweede paraboloïde.

8. De vraag is nu, welke, of waar zijn die *overeenkomstige beschrijvende lijnen* van die eerste stelsels der beide paraboloïden? Het antwoord is begrepen in de oplossing van het *problema*, om, wanneer zoodanige beschrijvende lijn van eene der paraboloïden gegeven is, alsdan de overeenkomstige beschrijvende lijn van de tweede paraboloïde te construeren? Deze nu vindt men, wanneer men eerst bepaalt het punt der gemeenschappelijke wederkeerige beschrijvende lijn, in welke deze, door de gegevene beschrijvende lijn van de eerste paraboloïde, gesneden wordt, en alsdan, door dit gevondene punt, de beschrijvende lijn van de tweede paraboloïde, volgens eene bekende constructie, construeert.

9. Maar het antwoord kan meer bepaald gegeven worden. *Die twee beschrijvende lijnen* namelijk, welke *de overeenkomstige evenredige deelen* der rigtlijnen van de beide paraboloïden vereenigen, *zullen de overeenkomstige beschrijvende lijnen zijn*, welke elkander in hetzelfde punt der gemeenschappelijke wederkeerige beschrijvende lijn zullen doorsnijden.

Laat ABCD (*fig.* 7) de scheele vierhoek wezen; AB en CD de rigtlijnen der eerste paraboloïde; BC en AD de rigtlijnen der tweede paraboloïde; AC en BD de gemeenschappelijke rigtlijnen der beide paraboloïden, wanneer men dezelve door de wederkeerige beschrijvende lijnen denkt gevormd te zijn; FG *de gemeenschappelijke beschrijvende lijn*, welke door het midden van AC en BD gaat. In het vlak der lijnen AB en BC zijn de parallelen AE aan BC en CE aan AB getrokken; D is met E vereenigd; alsdan is DE evenwijdig aan GF, omdat ABCE een parallelogram is, en alzoo EF = FB, evenzoo als, door de constructie, DG = GB is.

Men neme nu twee beschrijvende lijnen H*h* en I*i* van de beide paraboloïden, in voege dat zij overeenkomstige evenredige deelpunten van de overstaande rigtlijnen vereenigen, en men diensvolgens hebbe DC : *i*C = DA : *h*A = BA : IA = BC : HC. Zonder op deze evenredigheid

te letten, gaat elke dezer beschrijvende lijnen door een punt van de lijn FG. Men neme aan, dat dit twee onderscheidene punten O en O' zijn. De vlakken, gaande door FG en door deze beschrijvende lijnen, doen, *in* de figuur, de driehoeken HhK en IiL ontstaan, en in deze zijn hK en iL evenwijdig aan DE en dus ook aan FG, omdat DE, als evenwijdig aan FG, ook evenwijdig loopt aan de vlakken, gaande door FG.

Vermits $KF = FH$ en $LF = FI$ is, zal $FO = \frac{1}{2}\, hK$, en $FO' = \frac{1}{2}\, iL$ zijn. Maar

$$DC : iC = DE : iL,$$
$$DA : hA = DE : hK,$$

en daar $DC : iC = DA : hA$ is, zal ook $DE : iL = DE : hK$ zijn, dat is $iL = hK$; ergo ook $FO = FO'$; ergo zijn O en O' geene verschillende punten, dat is, *de beschrijvende lijnen*, *welke de overeenkomstige evenredige deelpunten van de rigtlijnen der beide* paraboloïden *vereenigen*, *snijden elkander in een punt der gemeenschappelijke* wederkeerige beschrijvende lijn, *en zullen daarom die lijnen wezen*, *welke* overeenkomstige beschrijvende lijnen *genoemd zijn* (2).

§ 6.

---

(2) Het in deze § bewezene doet ook besluiten tot de stelling, *dat twee paraboloïden elkander volgens niet meer dan volgens* drie *lijnen kunnen snijden*.

De Fransche wiskunstenaar GASCHEAU stelt het tegendeel in een werkje, getiteld: »*Géometrie Déscriptive. Traité des Surfaces réglées.* Paris 1828;" en de misstelling schijnt door LEROY, die van dit geschrift, in zijn *Traité de Géométrie Descriptive*, melding maakt, niet opgemerkt te zijn.

Op blads. 49 van genoemd werkje stelt de Schrijver het probleme: »*Un plan et trois* »*droites étant donné, trouver une droite, parallèle au plan, et assujetie à rencontrer* »*les trois droites données.*" En na een schema der oplossing te hebben gegeven, even als voor een problema, dat tot de *éénvlakkige hyperboloïde* betrekking heeft, laat hij volgen: »on conclura facilement des rémarques précedentes, *que deux paraboloïdes*, *qui* »*ont deux génératrices communes*, *se coupent de nouveau*, *suivant deux autres droites*, »*et que ces deux surfaces ont les mêmes plans directeurs.*"

§ 6.

Beschouwing der drie *verschillende hyperbolische paraboloïden, welke over de drie paren van overstaande zijden eens scheelen vierhoeks kunnen beschreven worden.*

§ 1. Wanneer men de zoogenaamde diagonalen AC en BD (*fig.* 8) ook beschouwt als twee *overstaande zijden* van den scheelen vierhoek, — gelijk zulks in de daad behoort, — alsdan heeft een scheele vierhoek *drie* *pa-*

In een eigenlijken zin is deze stelling *onjuist*, tenzij men wilde begrijpen, dat éène der vier bedoelde gemeenschappelijke lijnen op een oneindigen afstand van de drie overige gelegen ware, ten einde, op die wijze, de snijding van *twee paroboloïden* in verband te brengen met die van *twee éénvlakkige hyperboloïden*, welke elkander *stellig* volgens *vier* beschrijvende lijnen, twee aan twee tot de beide verschillende stelsels van beschrijvende lijnen behoorende, kunnen doorsnijden.

Het boven uitgedrukte problema wordt in dezer voege opgelost. Laten de drie gegevene lijnen genoemd worden A, B en C en het gegeven vlak P. Construeer de *hyperbolische paraboloïde*, hebbende A en B tot *rigtlijnen* en P tot *rigtvlak*, en bepaal de doorsnijdingspunten der lijn C met dit scheele vlak. Het aantal dezer doorsnijdingspunten kan niet meer dan 2 zijn. Noemdezelve c en c', en trek door deze twee punten twee beschrijvende lijnen; deze zullen beide aan de vraag voldoen. Doch men kan ook A en C tot *rigtlijnen* nemen, en de *paraboloïde* construeren, welke het vlak P mede tot *rigtvlak* zal hebben. Deze paraboloïde zal door de lijn B gesneden worden in twee punten b en b', en de beschrijvende lijnen, door dezelve, in deze *tweede paraboloïde*, getrokken, zullen mede aan het problema voldoen. Deze lijnen nu kunnen geene andere wezen dan die, welke verkregen zijn met de eerste paraboloïde, omdat, wegens den graad der æquatie van het oppervlak, het aantal der oplossingen slechts 2 kan bedragen. Derhalve moeten de lijnen, gaande door c en c' invallen met de lijnen, gaande door b en b', en *de beide paraboloïden hebben derhalve* twee beschrijvende lijnen gemeen. Maar ook de rigtlijn A, dat is eene der wederkeerig beschrijvende lijnen, behoort tot beide; derhalve snijden de beide paraboloïden elkander volgens *drie* regte lijnen, en niet volgens *vier* lijnen. Bestond er eene vierde gemeenschappelijke beschrijvende lijn, alsdan zou dezelve moeten behooren tot het stelsel van beschrijvende lijnen, tot hetwelk A behoort. Zij zou der-

paren van overstaande zijden, namelijk AB en DC, AD en BC, AC en BD. Elk dezer paren als rigtlijnen aannemende, zal men, over dezelve, drie paraboloïden kunnen beschrijven, maar deze oppervlakken moeten, ten aanzien der wijze van beweging van de beschrijvende lijn, behoorlijk onderscheiden worden.

2.

---

derhalve evenwijdig moeten loopen aan de rigtvlakken der beide paraboloïden, dat is aan de snijding dezer vlakken; maar aan de snijding is A ook evenwijdig; derhalve zou *de vierde lijn* ook *evenwijdig aan* A *moeten loopen;* twee beschrijvende lijnen van hetzelfde stelsel zouden dan parallel zijn, hetgeen *onmogelijk* is. Zelfs ook indien deze lijnen tot de verschillende stelsels behoorden, zou die evenwijdigheid van twee beschrijvende lijnen eener paraboloïde onmogelijk wezen. Voor eene *éénvlakkige hyperboloïde* heeft het vooronderstelde plaats, maar zoodra dit oppervlak overgaat in eene *paraboloïde*, houdt hetzelve op een *gesloten oppervlak* te wezen, en het evenwijdig zijn van twee beschrijvende lijnen kan, in een eigenlijken en stelligen zin, niet meer gebeuren.

De *analysis* bevestigt deze uitkomst. Laat de eerste lijn A invallen met de as van x; gemakshalve neme men het voorbeeld eener *regte Conoïde* van den tweeden graad, en stelle dat A loodregt zij op het rigtvlak P, zoo is P tevens het coördinaten-vlak $y\,z$. A heeft derhalve tot vergelijkingen $y = 0$ en $z = 0$.
De vergelijkingen van de lijn B zijn $y_1 = a\,x_1 + b$; $z_1 = c\,x_1 + d$.
De vergelijkingen van de lijn C zijn $y_2 = a'x_2 + b'$; $z_2 = c'x_2 + d'$.

Hierdoor zal men, met weinige moeite, vinden, dat de *paraboloïden*, welke A en B en A en C tot rigtlijnen en het vlak $y\,z$ tot rigtvlak hebben, uitgedrukt worden door de vergelijkingen

$$a\,x_1\,z_1 + b\,z_1 = c\,x_1\,y_1 + d\,y_1$$
$$a'\,x_2\,z_2 + b'\,z_2 = c'\,x_2\,y_2 + d'\,y_2$$

of wel door

$$\left.\begin{aligned}(a\,x_1 + b)\,z_1 &= (c\,x_1 + d)\,y_1\\ (a'\,x_2 + b')\,z_2 &= (c'\,x_2 + d')\,y_2\end{aligned}\right\}\ldots(\alpha).$$

Men moet nu $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ stellen, en uit deze vergelijkingen tweeder coördinaten achtervolgens elimineren, b.v. eerst z en daarna y of x, om te verkrijgen de vergelijkingen der projectiën van de regte of kromme lijnen, volgens welke de beide paraboloïden elkander snijden. Men deele de vergelijkingen (α) op elkander, zoo verkrijgt men eene æquatie van den vorm $p\,x^2 + q\,x + r = 0$, welker twee binomial-factoren $x - m = 0$ en $x - n = 0$ beteekenen, dat de projectie der snijding van de paraboloïden op het vlak $x\,y$ is een stelsel van twee regte lijnen, evenwijdig loopende aan de as van y. Eliminerende x uit dezelfde vergelijkingen (α), zoo verkrijgt men, na herleiding

y

2. *Vooreerst:* wanneer AB en DC *rigtlijnen* zijn, en dat men, overeenkomstig de gewone wijze (beteekend in § 2), de lijn AD, van A naar B, en van D naar C, over dezelve laat bewegen, zoodat de, in gelijke tijdsdeelen, doorgeloopene ruimten, of de van AB en DC afgesnedene deelen, in bestendige reden zijn, zal er eene *hyperbolische paraboloïde* voortgebragt worden; men onderscheide dezelve van de overige door de letter P.

Ten anderen wordt er eene *paraboloïde* voortgebragt, door BC en AD als *rigtlijnen* te beschouwen, en de lijn AB over dezelve te bewegen, van B naar C, en van A naar D. Deze paraboloïde is evenwel dezelfde als *de paroboloïde* P, omdat slechts de rigtlijnen verwisseld zijn met de beschrijvende lijnen, en de beschrijvende lijnen met de rigtlijnen.

3. . *Ten derden* verkrijgt men eene *paraboloïde*, hebbende AC en BD tot *rigtlijnen*, wanneer de lijn AA over dezelve bewogen wordt van B naar D en van A naar C. Zij deze *de paraboloïde* Π.

Ten vierden. Bewegende over AB en CD de lijn AC, overeenkomstig het gestelde en ontwikkelde in § 3, van A naar B en van C naar D, als-

---

$$y \left\{ (cd' - c'd)\, y + (a'd - ad')\, z \right\} + z \left\{ (bc' - b'c)\, y + (ab' - a'b)\, z \right\} = 0.$$

Aan deze æquatie wordt voldaan door de afzonderlijke termen $= 0$ te stellen, waardoor men, behalve $y = o$ en $z = o$, twee vergelijkingen van den eersten graad, dat is *twee vergelijkingen van regte lijnen* op het vlak yz verkrijgt. Zij gaan door den oorsprong der coördinaten, en zijn derhalve, met de projectiën op het vlak xy, de projectiën van twee regte lijnen, evenwijdig aan het vlak yz loopende, en door de as van x *gaande*. Bovendien is de lijn, hebbende $y = 0$ en $z = 0$ tot æquatie, de as van x zelve, en deze zal eene *derde lijn* wezen, volgens welke de beide paraboloïden elkander snijden; maar ook nergens anders hebben deze oppervlakken eenig punt gemeen. Wel is waar, dat, indien z en y beide $= \infty$ worden, [illegible]dat x oneindig is, de æquatien (x) ook voldaan worden, en dat er alzoo eene *vierde lijn* zou bestaan, op een oneindig grooten afstand evenwijdig aan de eerste lijn A loopende; maar deze niet eindige oplossing kan hier in geene aanmerking komen. /Zonder

alsdan zal deze paraboloïde met P *dezelfde rigtlijnen* hebben, maar zij zal dezelfde wezen als *de paraboloïde* Π.

4. *Ten vijfden.* Eene lijn AD, bewogen langs AC en BD, van A naar C en van D naar B, zal *eene paraboloïde* π voortbrengen, geheel onderscheiden zijnde van de *paraboloïden* P en Π.

Ten zesden. Maar deze *paraboloïde* π wordt ook verkregen, door BC en AD als *rigtlijnen* aan te nemen, en over dezelve eene lijn BD te bewegen van B naar C en van D naar A. Deze *paraboloïde* π zal met P de lijnen BC en AD *gemeen* hebben, terwijl, eindelijk, de lijnen AC en BD *gemeen* zijn aan de *paraboloïden* Π en π.

5. Alle deze paraboloïden zijn, twee aan twee, *overeenstemmende paraboloïden*, dat is zij hebben *dezelfde rigtlijnen* en *verschillende rigtvlakken*, of, ten opzigte der wederkeerige beschrijvende lijnen, *verschillende rigtlijnen* maar *een zelfde rigtvlak*, en zij snijden elkander *volgens drie beschrijvende lijnen*, van welke ééne tot het wederkeerige stelsel behoort.

6. De *paraboloïden* P en Π snijden elkander volgens de lijnen AB en CD; de derde lijn, volgens welke zij elkander zullen snijden, moet tot het wederkeerige stelsel behooren, en derhalve eene beschrijvende lijn wezen, gaande over AB en CD. Zij moet tot beide de paraboloïden behooren, en kan geene andere zijn dan die, welke de gelijknamige deelpunten van AB en CD vereenigt. Nu worden, voor de paraboloïde P, de deelpunten gerekend van A naar B en van D naar C, en, voor de paraboloïde Π, heeft de telling plaats van A naar B en van C naar D. Weshalve de beide gelijknamige deelpunten van CD noodwendig moeten zamenvallen in het midden F van CD; op dezelfde wijze geldt dit voor AB; en de gemeenschappelijke wederkeerige beschrijvende lijn van Π en P kan daarom geene andere wezen dan de lijn EF, welke het midden van AB vereenigt met het midden van CD.

7. Eveneens zal nu GH, welke het midden van AD met het midden van BC vereenigt, de derde lijn wezen, gemeen aan de beide *parabo-*

boloïden P en π, welke elkander volgens de lijnen A D en B C snijden; en dat de lijn I K, gaande door het midden van A C en B D, is de derde snijlijn der *paraboloïden* Π en π, is reeds in de vorige § betoogd. Daar nu E F en G H *overeenkomstige beschrijvende lijnen* der paraboloïden Π en π zijn, zullen zij elkander in eenig punt O van de lijn I K snijden (§ 3, art. 9); bovendien zal men, de *fig.* 8 voorstellende even als *fig.* 7, gemakkelijk betoogen, dat, uit de gelijkheden, A G = G D en B H = C H; A B = B E en D F = C F; D I = B I en A K = C K, volgen moet E O = O F, G O = O H, I O = O K, gelijk dit ook volgt uit de bekende eigenschap, dat *eenige beschrijvende lijn niet alleenlijk de rigtlijnen, maar ook de* wederkeerige beschrijvende lijnen *in evenredige deelen verdeelt.* En uit het eene en andere komt men derhalve tot het besluit, dat van de lijnen, volgens welke de *paraboloïden* P, Π en π elkander, twee aan twee snijden, *drie zullen wezen de lijnen, welke door het midden der drie paren van overstaande zijden des scheelen vierhoeks gaan;* deze *lijnen* zullen *elkander in het zelfde punt snijden en midden door deelen;* de *zes* overige *snijlijnen* zullen die overstaande zijden zelve zijn. Ook kan men zeggen: »*elke twee overstaande zijden* »*van een scheelen vierhoek, benevens de lijn, welke het midden van* »*die zijden vereenigt, maken de drie lijnen uit, volgens welke de twee* »*onderscheidene paraboloïden, hebbende die zelfde zijden tot rigtlijnen,* »*elkander zullen snijden.*" (3)

§ 7.

---

(3) Het bewezene geeft aanleiding tot de navolgende opmerkingen.

1. Beschouwt men de zijden van een scheelen vierhoek als zijnde de *zes ribben eener driehoekige pyramide*, hebbende b. v. A D C tot basis en B tot toppunt, zoo kan men stellen, dat *de drie lijnen, welke gaan door het midden van de overstaande*, niet in een zelfde vlak gelegene, *ribben*, *elkander, binnen de pyramide*, *in een enkel punt zullen snijden en tevens midden door deelen.* Dit punt zal bovendien *het zwaartepunt van den inhoud der pyramide* zijn. Want het zwaartepunt ligt in elk der vlakken, zoo als D K B, gaande door eenige ribbe, zoo als B D, en het midden K van de overstaande ribbe.

 Het

§ 7.

Bijzondere overwegingen nopens de rigtingen en betrekkelijke standen der rigtvlakken en der voorname assen van de drie hyperbolische paraboloïden, welke de overstaande zijden eens scheelen vierhoeks tot rigtlijnen hebben.

1. De voorname assen eener paraboloïde loopen evenwijdig aan de doorsnijding van de beide rigtvlakken (§ 1, art. 7 en 12). De paraboloï-

---

Het zwaartepunt moet alzoo het punt wezen, aan die vlakken (welker aantal *drie*, of ook *ee*, is) gemeen; dit punt is het punt O.

2. De vlakke vierhoek ABCD de projectie zijnde van den scheelen vierhoek, zoo heeft ook elke vlakke vierhoek, even als elke scheele vierhoek, de eigenschap, dat *de lijnen, welke door het midden der overstaande zijden en der beide diagonalen gaan, elkander in een enkel punt, binnen den vierhoek gelegen, zullen doorsnijden.* Door de elementaire Meetkunst bewijst men dit ook uit de bekende eigenschap, dat de lijnen, welke de middenpunten der vier zijden (of ook van twee overstaande zijden en der beide diagonalen) vereenigen, altijd een *parallelogram* vormen.

3. Brengt men, door elke zijde eens scheelen vierhoeks een vlak, evenwijdig aan de overstaande zijde, zoo wordt er een *parallelopipedum* gevormd (*fig.* 9), van hetwelk *de diagonalen der zes zijvlakken*, de *zes zijden* van den *scheelen vierhoek* zijn, of ook de *zes ribben* der bovengenoemde *pyramide.* Deze pyramide, geheel binnen het parallelopipedum gelegen, kan gedacht worden te ontstaan door van het parallelopipedum af te snijden *vier* pyramiden $ADaC$ enz., volgens vlakken, gaande door de vier hoekpunten A, B, C, D, *drie aan drie* genomen. Elke dezer vier pyramiden het $^1/_6$ gedeelte van den inhoud des parallelopipedums zijnde, zal de *pyramide* ABCD *het* $^1/_3$ *gedeelte van het parallelopipedum wezen.* Door middel van dit parallelopipedum blijkt ook terstond, dat de lijnen, gaande door het midden der overstaande zijden des vierhoeks, elkander in een enkel punt snijden, zijnde het middelpunt des parallelopipedums. *Hetzelve heeft daarom, met de pyramide* ABCD, *een gemeenschappelijk zwaartepunt.*

loïden, welke, in de vorige §, beteekend zijn door Π en π, hebben AB en CD, BC en AD tot rigtlijnen, en tot *gemeenschappelijk rigtvlak*, het vlak der lijnen AC en BD, dat wil zeggen het vlak, aan hetwelk deze lijnen evenwijdig loopen (§ 5, art. 1). Alle beschrijvende lijnen loopen evenwijdig aan het overeenkomstige rigtvlak; derhalve loopen AC, EF, BD (zie altijd *fig.* 8), welke beschrijvende lijnen van de paraboloïde Π zijn, evenwijdig aan het gemeenschappelijke rigtvlak van Π en π. Desgelijks loopen aan het zelfde rigtvlak evenwijdig de beschrijvende lijnen BD, HG, CA van de paraboloïde π. Maar EF en GH liggen in een zelfde vlak; derhalve loopt *het vlak der lijnen* GH en EF *evenwijdig aan het* gemeenschappelijk rigtvlak *der paraboloïden* Π *en* π.

2. Het wederkeerige rigtvlak van Π is een vlak, aan hetwelk AB en CD evenwijdig loopen; derhalve loopt ook IK aan dit vlak evenwijdig, vermits IK, even zoowel als AB en DC, eene beschrijvende lijn is van Π, indien men AC en BD als rigtlijnen aanmerkt. Maar AB en CD zijn ook wederkeerige beschrijvende lijnen van de paraboloïde P; GH is eveneens zoodanige wederkeerige beschrijvende lijn; ergo hebben Π en P hetzelfde wederkeerige rigtvlak, aan hetwelk IK en ook GH evenwijdig loopen. IK en GH liggen in een zelfde vlak; *het vlak der lijnen* GH *en* IK *loopt alzoo evenwijdig aan het* wederkeerige rigtvlak *van* Π *en van* P; en daarom zal *de as der paraboloïde* Π *evenwijdig moeten loopen aan de lijn* GH, zijnde de lijn van snijding der twee vlakken GEHF en GIHK, welke aan de beide rigtvlakken van Π evenwijdig loopen.

3. Op dezelfde wijze komt men tot het besluit, dat *de as van de paraboloïde* π *evenwijdig moet loopen aan de lijn* EF, en *die van de paraboloïde* P *evenwijdig aan* IK. Nu is GH de lijn, welke gaat door het midden van *die twee* overstaande zijden AD en BC des scheelen vierhoeks, welke noch als rigtlijnen, noch als beschrijvende lijnen der paraboloïde Π kunnen aangemerkt worden, en daarom niet tot die paraboloïde behooren. Hetzelfde geldt ten aanzien van de paraboloïden π en

P; en uit de voorgaande redeneringen mag men dan besluiten tot het navolgende THEOREMA.

De voorname as eener hyperbolische paraboloïde, beschreven over twee der overstaande zijden eens scheelen vierhoeks, welks vier hoekpunten, twee aan twee, vereenigd zijn door zes lijnen, loopt evenwijdig aan eene lijn, gaande door het midden *van die* twee *andere overstaande zijden, welke geene wederkeerige rigtlijnen van dezelfde paraboloïde kunnen wezen, of welke niet in het oppervlak van deze paraboloïde kunnen gelegen zijn.*

Zoodra de beide rigtlijnen en het rigtvlak eener hyperbolische paraboloïde gegeven zijn, kan men onmiddelijk *twee*, eenigzins verwijderde, beschrijvende lijnen construeren; men heeft daardoor een der scheele vierhoeken, welke in het oppervlak der paraboloïde gelegen zijn, en met dezelve ook *de rigting der voorname as*, dat is de streek, naar welke die voorname as gerigt is.

4. Wanneer men door elke der *zes* lijnen, welke de *vier* hoekpunten eens scheelen vierhoeks, *twee aan twee*, vereenigen, een vlak laat gaan, evenwijdig aan de tegenover gelegene lijn of zijde, ontstaat er een *parallelopipedum* (*fig.* 9), van hetwelk *de diagonalen der zes zijvlakken instemmen met de zes lijnen* of *zijden van den scheelen vierhoek*, en *welks middelpunt tevens het punt is van doorsnijding der drie lijnen, gaande door het midden der overstaande zijden van den vierhoek* (vergelijk de noot op art. 7 § 6). Dit punt zou men het *middelpunt van den vierhoek* kunnen noemen. Vergelijkende nu de figuren 8 en 9, zoo volgt uit het boven aangevoerde, en uit de eigenschappen van het parallelopipedum: 1° *dat drie aangrenzende ribben, waar ook genomen, de rigtingen zullen wezen, aan welke de voorname assen der drie paraboloïden* P, Π *en* π (welke de drie paren van overstaande zijden des *vierhoeks* tot rigtlijnen kunnen hebben) *evenwijdig zullen loopen.* 2°. *Dat eveneens de drie zijvlakken, gelegen om een zelfde hoekpunt van het parallelopipedum, als de drie rigtvlakken van die para-*

bo-

boloïden kunnen beschouwd worden, terwijl elk van die rigtvlakken is een *gemeenschappelijk rigtvlak*, of ook een *gemeenschappelijk wederkeerig rigtvlak*, van de drie paraboloïden, twee aan twee genomen. 3°. *Dat de hoeken, tusschen drie aangrenzende ribben van het parallelopipedum, zullen zijn de hoeken, welke de assen der drie paraboloïden onderling maken*, hetzij die assen elkander snijden of niet. 4°. *Dat de helften der* standhoeken, *of der supplementen van de* standhoeken *tusschen drie aangrenzende zijvlakken*, twee aan twee genomen, *zullen zijn gelijk aan de hoeken, begrepen tusschen de* asymptotische vlakken *en de* voorname middenvlakken *der paraboloïden*. 5°. En dat derhalve *de voorname middenvlakken evenwijdig zullen loopen aan de vlakken, welke de standhoeken en de supplementen der standhoeken van drie aangrenzende zijvlakken des parallelopipedums midden door deelen.*

5. Het blijkt derhalve, op welke eenvoudige wijze de betrekkelijke rigting der ribben en der zijvlakken van het bedoelde parallelopipedum, in verband staat met de betrekkelijke stelling en afmetingen der drie *paraboloïden* Π, π en P. De constructie van dit parallelopipedum zal daardoor die betrekkelijke standen en afmetingen doen bekend worden. Daarna kunnen de gronden, in § 4 ontwikkeld, toegepast worden, om de volstrekte standen en afmetingen der onderwerpelijke paraboloïden te bepalen. Overigens is de constructie van dit *parallelopipedum* allereenvoudigst; men behoeft toch daartoe niet te construeren de bovengenoemde evenwijdige vlakken, gaande door de zijden van den scheelen vierhoek; want na het middelpunt O des vierhoeks te hebben geconstrueerd, trekke men, door hetzelve, uit de hoekpunten A, B, C, D, lijnen AOb, BOa, COd, DOc men make $Ob = OA$, $Oa = OB$, enz. alsdan verkrijgt men de *vier* punten a, b, c, d, welke, met A, B, C, D, de *acht* hoekpunten van het parallelopipedum zullen uitmaken, enz. — Om verwarring van lijnen te voorkomen, zijn de uitgedrukte diagonalen AOb enz. in de figuur niet aangewezen.

6. Men kan nu vragen, hoedanig de scheele vierhoek moet afgeme-

meten zijn, *opdat de hoek, tusschen de assen van twee der* paraboloïden, *een* regte hoek *zij?* Indien b. v. de hoek der assen van de *paraboloïden* Π en π regt zal zijn, zal ook de hoek *d* D *b*, tusschen de ribben *d* D en D *b*, aan de bedoelde assen evenwijdig loopende, *regt*, en de zijvlakken *d* D *b* B, A *a* C *c* zullen *regthoeken* moeten wezen. Dit heeft plaats, wanneer de overstaande en verwisselende diagonalen B D en A C dezelfde lengte hebben. Nu zijn A C en B D de gemeenschappelijke beschrijvende lijnen of de gemeenschappelijke wederkeerige rigtlijnen der paraboloïden Π en π; en men zal derhalve, voor de andere paren van paraboloïden op dezelfde wijze redenerende, mogen besluiten: *dat de assen van eenig paar der drie paraboloïden, welke de overstaande zijden eens scheelen vierhoeks tot rigtlijnen kunnen hebben, regthoekig op elkander gerigt zullen wezen, wanneer* die twee *overstaande zijden des vierhoeks, welke*, hetzij als beschrijvende lijnen, hetzij als rigtlijnen, *aan beide de paraboloïden van het bedoelde paar gemeen zijn, dezelfde lengte hebben.*

7. Hieruit volgt terstond, *dat de assen der drie paraboloïden onderling loodregt op elkander zullen gerigt zijn, wanneer elke twee overstaande zijden van den scheelen vierhoek dezelfde lengte hebben.* Het overeenkomstige parallelopipedum alsdan regt zijnde, zal deszelfs middelpunt tevens het middelpunt van den omgeschreven bol zijn. Om elken scheelen vierhoek kan altijd een bol gedacht worden; wanneer alzoo de overstaande zijden van den scheelen vierhoek dezelfde lengte hebben, *alsdan zal het middelpunt van dien vierhoek tevens het middelpunt zijn van den omgeschreven bol.* Ook zullen nu de lijnen E F, G H, I K, welke door het midden der overstaande zijden gaan, tevens loodregt staan op de overstaande zijvlakken van het overeenkomstige parallelopipedum, en zij zullen daarom *de kortste afstanden* der genoemde overstaande zijden meten. Men kan daarom zeggen: *de assen der drie meergenoemde paraboloïden zullen onderling, onder regte hoeken, gerigt zijn*, wanneer zij *of evenwijdig loopen aan de lijnen der kortste afstanden van de overstaande zijden des scheelen vierhoeks, of wanneer die overstaande zij-*

zijden, twee aan twee, *dezelfde lengte hebben*, *of wanneer het middelpunt des vierhoeks invalt met het middelpunt des omgeschreven bols*, *of* ook nog, *wanneer de lijnen*, *gaande door het midden der overstaande zijden*, *tevens zijn de kortste afstanden van die zijden.*

8. Zijn er slechts twee paren van overstaande zijden, welke dezelfde lengte hebben, zoo hebben ook slechts twee paren van de drie paraboloïden (b. v. Π en π, π en P, en niet Π en P) onderling loodregte assen; maar het vlak, aan hetwelk de assen van Π en P, dat is van *het derde paar*, evenwijdig loopen, zal niettemin loodregt staan op de as van de paraboloïde π, dat is van de *derde* paraboloïde.

9. Maar in geval de as van *ééne* der paraboloïden loodregt staat op het vlak, aan hetwelk de assen der *beide* andere paraboloïden evenwijdig loopen, alsdan staat ook eenige ribbe D*d* (*fig* 9) van het, met den scheelen vierhoek overeenstemmende, parallelopipedum, loodregt op het vlak der beide andere aangrenzende ribben D*a*, D*b*; derhalve staan dan ook de zijvlakken D*b*B*d* en D*a*A*d* loodregt op het derde aangrenzende zijvlak D*b*C*a*; de rigtvlakken D*b*D*d*, D*a*C*b* en D*a*A*d*, D*a*C*b* van de genoemde beide andere paraboloïden zullen, in dat geval, loodregt op elkander staan, en de paraboloïden zelve zullen *regte Conoïden* wezen. Zijn de zijden van alle drie de paren even lang (wel te verstaan de zijden van elk paar, en niet alle de zijden zonder onderscheid), zoo worden ook *alle drie* de paraboloïden *regte Conoïden* (4).

10.

---

(4) In geval de drie assen loodregt op elkander staan, of wel, in het geval van gelijkheid der overstaande zijden van elk paar, zal de driehoekige pyramide ABCD *vier gelijke en gelijkvormige zijvlakken* hebben; haar *zwaartepunt* zal tevens *het middelpunt van den omgeschreven bol* zijn, dat is *het middelpunt van zwaarte zal invallen met het middelpunt der figuur.* Men zou eene zoodanige pyramide een *half regelmatig viervlak* kunnen noemen. De drie zijden van elk der zijvlakken zijn, in het algemeen, ongelijk; noemt men dezelve *a*, *b* en *c*, zoo zal men, door middel van het parallelodipedum D*b*C*ad*A*c*B, van hetwelk de pyramide als het ware de kern is, gemakkelijk vinden, dat de inhoud eener dusdanige pyramide bepaald wordt door de formule

$$I = \tfrac{1}{12} \sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}.$$

10. Wanneer er slechts één paar van loodregte assen bestaat, zoo is deze omstandigheid onvoldoende om te kunnen besluiten, dat eene der overeenkomstige paraboloïden eene *regte Conoïde* zal zijn. Daartoe wordt vereischt, dat de rigtvlakken dezer paraboloïde loodregt op elkander staan. Dit heeft plaats, wanneer van het parallelopipedum, dat met den scheelen vierhoek overeenstemt, twee der zijvlakken een regten hoek vormen, hetgeen plaats kan hebben, zonder dat een der drie aangrenzende zijvlakken een regthoek is, en daarom ook zonder dat van twee der paraboloïden de assen een regten hoek vormen. Zonder de rigtvlakken der drie paraboloïden onmiddelijk te construeren, en de hoeken, welke zij, twee aan twee, maken, te bepalen, kan men ook, uit de rigtingen der kortste afstanden van de overstaande zijden eens scheelen vierhoeks, opmaken of ééne van die drie paraboloïden eene *regte conoïde* is. Want dit zal het geval moeten zijn, zoodra men bevindt, *dat de rigtingen van twee dier kortste afstanden regthoekig* zijn, zonder dat zij elkander juist behoeven te snijden.

11. Het geval van *twee rigtvlakken loodregt op het derde*, zonder onderling een regten hoek te vormen, stemt overeen met het geval, dat van ééne der paraboloïden de as loodregt staat op het vlak, aan hetwelk de assen der beide andere paraboloïden evenwijdig loopen, of wel, dat de as van die eerste regthoekig is gerigt op elke as van de beide andere, zonder dat de twee assen van deze beide andere regthoekig zijn. In elk dezer gevallen zullen *die twee andere* paraboloïden *regte conoïden* zijn. Door eene nadere beschouwing van dit geval zal het ook blijken, *dat de lijn*, gaande door het midden van *die overstaande zijden* des vierhoeks, welke als gemeenschappelijke rigtlijnen van de beide *conoïden* kunnen beschouwd worden, *de kortste afstand van die zijden zal wezen*, en *dat de kortste afstanden van de twee overige paren van overstaande zijden regte hoeken zullen maken met dien eersten kortsten afstand*, en *tevens denzelven, in twee afzonderlijke punten, zullen doorsnijden.*

12. Zijn eindelijk de zijden van den scheelen vierhoek alle even lang,

of ook, zijn de zes lijnen, welke de vier hoekpunten, twee aan twee, vereenigen, even groot, alsdan wordt het overeenstemmende parallelopipedum een *cubus;* de driehoekige pyramide, welker hoekpunten met die van den scheelen vierhoek instemmen, wordt een *Tetraëdrum;* de zes zijden maken nu, twee aan twee, gelijke hoeken, en men zou den vierhoek een *regelmatigen scheelen vierhoek* kunnen noemen. De bol, welke door de vier hoekpunten gaat, is concentrisch met den bol, gaande door het midden der zes zijden, en door die zijden aangeraakt wordende. *De assen der drie conoïden zullen*, als in art. 7, *regthoekig zijn*, en het zal nader blijken, *dat zij zullen invallen met de kortste afstanden der overstaande zijden van den vierhoek*, dat is met de lijnen, gaande door het midden dier overstaande zijden. Hieruit, en wegens de regelmatigheid des vierhoeks, zal men kunnen besluiten, *dat de* drie *toppen van gezegde conoïden zullen zamenvallen in het middelpunt des vierhoeks*, en *dat dezelve regte conoïden* gelijk en gelijkvormig *zullen wezen*. Het vlak, gaande door de beide assen van *twee* dezer conoïden, zal *het raakvlak* zijn van den top der *derde conoïde*, en *de eerstgenoemde assen zijn tevens*, in dat raakvlak, *de snijdingen der asymptotische vlakken van die* derde *regte conoïde.*

13. De parallelopipeda, overeenkomende met de scheele vierhoeken, welke nu beschouwd zijn, waren het *scheeve ongelijkzijdige*, het *regte ongelijkzijdige*, en het *regte gelijkzijdige* of de *cubus*. Men zou nog kunnen vragen, onder welke voorwaarden het parallelopipedum, eene *rhomboïde*, dat is een *scheef gelijkzijdig parallelopipedum* zou wezen. Van eene rhomboïde zijn de zijvlakken *ruiten* of *rhombi;* de diagonalen dezer zijvlakken snijden elkander regthoekig, en, wanneer ook nog deze *rhombi* gelijk en gelijkvormig zijn, worden de diagonalen, welke in alle de zes zijvlakken, tegen over de gelijknamige hoeken (*scherpe* of *stompe*) staan, even lang. Gevolgelijk moet de scheele vierhoek, in dit geval, een zoodanige wezen, van welken de overstaande zijden regthoekig over elkander zijn gerigt, en bij de gelijkheid der zijvlakken van de overeen-

komstige rhomboïde, zal ééne zijde van elk paar dezelfde lengte hebben als ééne zijde van elk der andere paren, zoodat *de sommen der overstaande zijden gelijk zijn. De assen der* drie *paraboloïden*, tot dezen laatsten vierhoek behoorende, *zullen ook gaan door een zelfde punt* en *gelijke hoeken met elkander maken*, even zoo als voor den regelmatigen scheelen vierhoek; maar voor dezen zullen gezegde hoeken *regt* zijn, en de overstaande zijden zullen niet alleenlijk *regthoekig* over elkander, doch ook *midden* over elkander, gerigt wezen. Eindelijk zal men bevinden, dat de zijvlakken der *pyramide*, in de *rhomboïde* beschreven, zijn *vier gelijke* en *gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken*.

---

§ 8.

Bepaling van de ware ligging der assen en der toppen van de drie paraboloïden, welke het onderwerp der vorige beschouwingen hebben uitgemaakt.

1. Om de merkwaardigste bijzonderheden, aangaande de ware plaats der assen en der toppen van de paraboloïden P, Π en π, te leeren kennen, behoeft men slechts *drie* gevallen afzonderlijk te overwegen. Deze gevallen zijn:

a. *Wanneer twee der assen regthoekig over elkander zijn gerigt.*
b. *Wanneer twee der overstaande zijden van den scheelen vierhoek regthoekig over elkander liggen.*
c. *Wanneer twee der rigtvlakken loodregt op elkander staan, en de overeenkomstige paraboloïde diensvolgens eene regte conoïde is.*

2.

2. Men neme aan, dat de assen der paraboloïden Π en π regthoekig over elkander gerigt zijn, alsdan maken de lijnen GH en EF (*fig.* 9) een *regten hoek* met elkander, en D*b*B*d* is een *regthoek.* AB en CD zijn de *rigtlijnen* der *paraboloïde* Π, AD en BC die van π, AC en BD de *wederkeerige rigtlijnen van beide.* Het toppunt der eerste paraboloïde ligt in de snijding van twee beschrijvende lijnen, evenwijdig loopende aan twee lijnen, getrokken, in elk der rigtvlakken D*b*B*d* en D*b*C*a*, loodregt op derzelver doorsnede (§ 4, art. 1, 2, 3). Daar nu D*d* loodregt op D*b* staat, zal de top van Π gelegen zijn in de beschrijvende lijn, gaande over AB en CD, en evenwijdig loopende aan D*d*. Deze beschrijvende lijn kan geene andere wezen dan de lijn EF; ergo ligt de top van Π ergens in de lijn EF. Om den top nader te bepalen, zou men de beschrijvende lijn moeten construeren, gaande over AC en BD, en evenwijdig loopende aan eene lijn, getrokken in het vlak D*b*C*a* loodregt op D*b*. Vermits D*b*C*a* *geen* regthoek is, zal D*a* niet loodregt op D*b* staan, en aangezien IK evenwijdig loopt aan D*a*, zal de gezochte beschrijvende lijn verschillen van IK. Daarom zal het toppunt der paraboloïde niet kunnen wezen het middelpunt O des scheelen vierhoeks. De juiste kennis der plaats van dit toppunt in de lijn EF, aan deze of aan gene zijde van het punt O, is overigens van geen bijzonder belang.

Op dezelfde wijze blijkt, *dat het toppunt der paraboloïde* π *ergens in de lijn* GH *moet gelegen zijn,* doch niet in het punt O; maar EF en GH liggen in een zelfde vlak, en aan dezelve moeten de assen der paraboloïden Π en π evenwijdig loopen; derhalve liggen ook deze assen in een zelfde vlak, en wel in het vlak der lijnen EF en GH.

Men mag daaruit besluiten, *dat, indien de assen van twee paraboloïden,* welke over de zijden eens scheelen vierhoeks beschreven zijn, *eene onderling regthoekige rigting hebben, dezelve gelegen zullen wezen in het vlak der lijnen, gaande door het midden van* die *overstaande zijden des vierhoeks, welke als* afzonderlijke rigtlijnen *dier paraboloïden dienen, terwijl de top van elke dezer paraboloïden* ergens *in de over-*

eenkomstige van genoemde lijnen zal moeten liggen.

3, Indien twee der overstaande zijden des scheelen vierhoeks, b. v. de zijden AC en BD (*fig.* 10) regthoekig over elkander gerigt zijn, zullen de zijvlakken $DbBd$, $aCcA$, van het overeenstemmende parallelopipedum, *ruiten* of *rhombi* zijn. Van deze zijvlakken toch zijn AC en BD de verwisselende diagonalen, en deze regthoekig over elkander liggende, zullen ook de beide diagonalen van elk dezer zijvlakken een regten hoek met elkander maken; ergo zijn deze zijvlakken *ruiten*, en, trekkende, uit B en D, de lijnen BL en DR loodregt op de overstaande ribben Db en Bb, zoo heeft men $DL = BR$.

Men beschouwe nu wederom AB, CD en AD, BC als rigtlijnen van de *paraboloïden* Π *en* π, hebbende de bovengenoemde lijnen of zijden, AC en BD, tot *wederkeerige rigtlijnen.* Het toppunt van Π zal liggen in het doorsnijdingspunt van die beschrijvende lijnen, welke, over AB, CD en BD, AC gaande, evenwijdig loopen aan de lijnen, getrokken, uit eenig punt van Db, in de rigtvlakken $DaCb$ en $DbBd$, loodregt op Db; ééne dezer beschrijvende lijnen zal diensvolgens evenwijdig moeten zijn aan de perpendiculair BL. Eveneens zal het toppunt van π liggen moeten in eene beschrijvende lijn, gaande over AD en BC, en evenwijdig loopende aan de perpendiculair DR. Deze beschrijvende lijnen worden derhalve geconstrueerd, door, uit de punten L en R lijnen LM, RS te trekken, gelegen in de vlakken $DaCb$ en $bCcB$, en evenwijdig loopende aan AB en AD, dat is evenwijdig aan de diagonalen ab en bc; daarna uit M en S de lijnen MN evenwijdig aan BL en ST evenwijdig aan DR trekkende, zullen deze de bedoelde beschrijvende lijnen wezen. Nu heeft men in de aanwezige gelijkvormige driehoeken,

$Db : DL = DU : DM = \frac{1}{2}DC : DM$ en $Bb : BR = BV : BS = \frac{1}{2}BC : BS$; daar nu $Db = Bb$ en $DL = BR$ is, zal ook $DC : DM = BC : BS$ zijn.

Hieruit volgt dat MN en ST *overeenkomstige beschrijvende lijnen* zullen wezen (§ 5, art. 7, 8 en 9), liggende in een zelfde vlak, en elkander snijdende in eenig punt Q van de lijn IK, welke gaat door het

het midden van de overstaande regthoekig gerigte zijden AC, BD van den scheelen vierhoek. De toppen der gedachte paraboloïden liggen dan in het vlak van die beschrijvende lijnen; maar dit vlak moet evenwijdig loopen aan het gemeenschappelijk rigtvlak $DbBd$ der beide paraboloïden; bovendien moeten de assen mede aan dit rigtvlak evenwijdig zijn; derhalve liggen ook de assen in het vlak dier beschrijvende lijnen.

Twee der assen liggen gevolgelijk niet alleenlijk in een zelfde vlak, wanneer zij *loodregt op elkander gerigt zijn, maar ook indien de beide gemeenschappelijke wederkeerige rigtlijnen* van de overeenkomstige paraboloïden *regthoekig over elkander liggen.*

4. Is *één* der drie standhoeken tusschen de aangrenzende zijvlakken van het *parallelopipedum* regt, dat is, maken van *éénе* der *drie paraboloïden* de rigtvlakken een *regten hoek*, zoo is die paraboloïde eene *regte conoïde*. Het toppunt ligt nu in de snijding van die twee beschrijvende lijnen, welke loodregt op de wederkeerige rigtvlakken staan. Zijn derhalve $DbBd$ (*fig.* 9) en $DaCb$ de rigtvlakken, zoo moet de top der *conoïde* liggen op die beschrijvende lijn van AB en CD, welke loodregt op het rigtvlak $DaCb$ staat. Eveneens moet dezelve top liggen in de beschrijvende lijn, gaande over AC en BD, en loodregt staande op het rigtvlak $DbBd$. Maar die beschrijvende lijnen zijn, door dien loodregten stand, de kortste afstanden der rigtlijnen AB, CD en AC, BD; derhalve zal *de top der conoïde in het snijpunt dezer lijnen gelegen wezen*, want, als *wederkeerige beschrijvende lijnen van* dezelfde *paraboloïde*, zullen zij elkander *stellig* snijden.

5. Men zal nu kunnen nagaan, wat er gebeuren moet, indien de as van eene der paraboloïden, b. v. van π, loodregt is gerigt op de rigtingen der assen van de beide andere paraboloïden Π en P, *zonder dat van deze laatste de rigtingen een regten hoek maken.* In dit geval zijn Π en P *regte conoïden* (§ 7, art. 9), en hetzelve verschilt niet van het geval, in hetwelk *twee* der zijvlakken van het overeenkomstige *parallelopipedum*, b. v. $DbBd$ en $DaAd$ loodregt staan op het derde $DaCb$.

De

De top der conoïde Π moet nu liggen in de doorsnijding van de lijnen der kortste afstanden van AB, CD en AC, BD. Maar de kortste afstand der eerste rigtlijnen valt hier in met de lijn EF, vereenigende het midden van AB met het midden van CD. Derhalve ligt de top van Π ergens op de lijn EF. Eveneens ligt de top der conoïde P in de doorsnijding der kortste afstanden van AB, CD en AD, BC, en daarom ook ergens op de lijn EF. *Wanneer alzoo twee der paraboloïden* conoïden *zijn*, *zullen derzelver toppen ergens gelegen wezen op de lijn, gaande door het midden der gemeenschappelijke rigtlijnen van de beide regte conoïden, en derhalve ook door het middelpunt van den scheelen vierhoek.* Maar nu zal ook *de top van de* derde *paraboloïde*, welke *geene* regte conoïde is, *vallen in het middelpunt* O *des vierhoeks*, *en hare as zal juist gerigt wezen langs de zoo even genoemde lijn*, *welke door het midden der gemeenschappelijke rigtlijnen van de beide regte conoïden gaat.* Want omdat de assen van Π en π loodregt op elkander gerigt zijn, zal, volgens art. 2, de top van π ergens in de lijn GH, gaande door het midden van hare rigtlijnen AD en BC, moeten liggen. Door dezelfde gronden zal deze top ook moeten liggen ergens in de lijn IK, gaande door het midden van de wederkeerige rigtlijnen AC en BD, omdat ook de assen van π en P eene loodregte rigting hebben. Derhalve ligt die top in het snijpunt O van die middellijnen, dat is *in het centrum van den scheelen vierhoek*, en daar de as van π evenwijdig moet zijn aan EF (§ 7, art, 3), zal zij *met* EF *moeten invallen.*

6. Hoezeer de toppen der *paraboloïden* en der *beide regte conoïden*, in het voorgaande artikel overwogen, op dezelfde regte lijn EF, gaande door het middelpunt O, zijn gelegen, zoo zijn dezelve niettemin onderscheiden. Nogtans kunnen *twee* van deze *drie* toppen, en wel die *der beide regte conoïden*, zamenvallen, en dit zal het geval zijn, wanneer het derde zijvlak DbCa eene *ruit* is. Want in art. 3 is betoogd, dat alsdan de assen van die twee paraboloïden, welke AB en CD tot gemeenschappelijke rigtlijnen, of ook tot gemeenschappelijke wederkeerige rigtlijnen, heb-

hebben, in een zelfde vlak zullen liggen. Die beide Paraboloïden zijn hier *de regte conoïden* π en P; van deze liggen derhalve de assen in een zelfde vlak; maar elke derzelve moet ook de lijn EF snijden (art. 5); ergo gaan zij door hetzelfde punt van EF, *dat is*, volgens het voorgaande, *die beide conoïden zullen een gemeenschappelijk toppunt hebben.*

7. Is het derde zijvlak mede regthoekig, zoo als de beide andere, alsdan zijn *de drie paren van assen en van rigtvlakken onderling loodregt*, en de paraboloïden zullen alle *regte conoïden* zijn. De as van elke dezer conoïden nu loodregt gerigt zijnde op die der beide andere, zal, volgens art 5, door het middelpunt O van den vierhoek moeten gaan, en de top der conoïde zal van dit punt O niet onderscheiden wezen. *De toppen der conoïden gaan derhalve door hetzelfde punt* O, *zijnde het middelpunt van den scheelen vierhoek, en hare assen zullen juist gerigt wezen langs de drie lijnen, welke door het midden der overstaande zijden van den scheelen vierhoek gaan.*

8. De uitkomst, in art. 7 uitgedrukt, heeft plaats, wanneer de overstaande zijden van den scheelen vierhoek, twee aan twee, even lang zijn, dat is wanneer het overeenkomstige parallelopipedum *regt* is. Zijn die overstaande zijden bovendien loodregt over elkander gerigt, dat is, hebben alle de zijden van den vierhoek dezelfde lengte, zoodat dan ook het overeenkomstige parallelopipedum een *cubus* is, alsdan verandert die uitkomst niet. *De drie conoïden zullen ook een gemeenschappelijk toppunt hebben, en onderling loodregt gerigte assen*, maar daarbij komt nog *de gelijkheid van derzelver parameters*, want uithoofde van de regelmatigheid des vierhoeks kan de grootte van ééne der conoïden niet verschillen van die der beide andere; zij moeten *onderling gelijk en gelijkvormig* wezen.

9. Wanneer de overstaande zijden des scheelen vierhoeks regthoekig over elkander liggen, en dat daardoor het overeenstemmende parallelopipedum is eene *rhomboïde*, alsdan volgt uit het bewezene in art. 3, dat de assen der paraboloïden, twee aan twee, in een zelfde vlak zullen

moeten liggen. De rigtingen dier assen zullen diensvolgens moeten invallen met de drie doorsnijdingen van die vlakken. *Gevolgelijk gaan*, in dit geval, *de drie assen door een zelfde punt. De drie toppen vallen echter niet zamen*, maar liggen, op die assen, in de doorsnijdingen van dezelve met de vlakken, welke de beschrijvende lijnen, evenwijdig loopende aan de snijdingen van vlakken, loodregt gaande door de rigtvlakken, bevatten. Zijn bovendien de sommen der overstaande zijden gelijk, zoo worden *de hoeken tusschen de assen*, of twee derzelve en het supplement van den derden, *even groot*; en men kan hieruit gemakkelijk afleiden, dat *de lijn*, vereenigende het snijpunt der assen en het middelpunt des vierhoeks, *de diagonaal zal wezen van eene* rhomboïde, *gelijkvormig aan de bovengenoemde, en de rigtingen der assen tot rigtingen van drie aangrenzende ribben hebbende.* Eindelijk zullen *de drie paraboloïden gelijk en gelijkvormig zijn.* Naarmate deze *rhomboïde* meer of minder scherp is, zullen de toppen der paraboloïden meer of minder verwijderd zijn van het doorsnijdingspunt der assen, en zij zullen in dat doorsnijdingspunt zamenvallen, wanneer de hoeken tusschen de ribben regt worden; te gelijker tijd vermindert het verschil tusschen de beide parameters van elke der paraboloïden, en bij den overgang van de *rhomboïde* tot den *cubus*, dat is, bij het gelijk worden van alle de zijden des scheelen vierhoeks, wordt ook dat verschil gelijk *nul*, en de paraboloïden gaan over in *regte conoïden*. (zie nader art. 11 van de volgende §).

10. De plaats der toppunten en de ware ligging der assen van de paraboloïden zijn in de voorgaande beschouwingen slechts aangewezen, voor zoo verre dezelve merkwaardig waren en onveranderlijk voor elken scheelen vierhoek van dezelfde soort. Wilde men *die toppen* en *die assen* bepalen, van welke geene bepaalde melding is gemaakt geworden, alsdan zou men daartoe het voorschrift van § 4 moeten volgen.

11. Het is ook, ingevolge het voorgaande, gemakkelijk in te zien, dat, wanneer noch de overstaande zijden van een scheelen vierhoek dezelfde lengte hebben, noch regthoekig over elkander liggen, noch dat

twee

twee der rigtvlakken loodregt op elkander staan, alsdan ook geene der paraboloïden eene *regte conoïde* zal kunnen wezen, noch met eene der twee andere een gemeenschappelijken top zal kunnen hebben, noch ook dat, van twee derzelve, de assen elkander zullen kunnen snijden. De plaats van de toppen, de ware ligging der assen (hoezeer de betrekkelijke rigtingen, als evenwijdig aan de lijnen, vereenigende het midden der overstaande zijden des vierhoeks, bepaald zijn) en de afmetingen der paraboloïden, zijn alsdan minder merkwaardig, en veranderen met elke andere afmeting en gedaante van den scheelen vierhoek.

---

§ 9.

Bepaling van de betrekkelijke grootte der parameters van de drie paraboloïden, welke over de overstaande zijden eens scheelen vierhoeks kunnen beschreven worden.

1. De ware grootte der parameters van elke der paraboloiden P, Π en π, wordt eenvoudigst door de *beschrijvende Meetkunst* bepaald, en de constructie is in § 4 aangewezen. De betrekkelijke grootte echter kan *korter* bepaald en *juister* aangewezen worden door *berekening*. Daartoe behoeve men slechts te zoeken de waarde van *de tweede magt der trigonometrische tangens van den halven standhoek der rigtvlakken* van elke der paraboloïden; want die waarde drukt tevens de verhouding $\frac{p'}{p}$ tusschen de beide parameters p en p' der zelfde paraboloïde uit (§ 4, art. 4). Eene aanwijzing van de gronden, en van de belangrijkste uitkomsten dier berekening, zal deze verhandeling besluiten.

2. Men neme de navolgende notatiën aan, (zie *fig.* 9).

$AB = a$; $CD = a_1$; $AD = b$, $BC = b_1$; $BD = c$, $AC = c_1$.

De *hoek* der overstaande zijden a en a_1, dat is de *hoek* (a, a_1) zij $= \alpha$; en eveneens de *hoek* $(b, b_1) = \beta$, en *hoek* $(c, c_1) = \gamma$.

Men noeme de *paraboloïde*, hebbende tot *rigtlijnen* a en a_1 of b en b_1, P.

Zoo ook *die*, welker *rigtlijnen* zijn a en a_1 of c en c_1 Π; en *die*, welke b en b_1 of c en c_1 tot *rigtlijnen* heeft, π.

De *hoek*, tusschen de assen der *paraboloïden* P en Π worde uitgedrukt door (P, Π) en *die*, tusschen de assen van P en π, en van Π en π, door (P, π) en (Π, π).

Eindelijk drukke men de *standhoeken der rigtvlakken* van de *drie paraboloïden* eenvoudiglijk uit door de overeenkomstige geaccentueerde letters (P′), (Π') en (π').

3. De scheele vierhoek is geheel en al bepaald, wanneer de afstanden tusschen deszelfs hoekpunten gegeven zijn, dat is, wanneer gegeven zijn a, a_1; b, b_1; c, c_1. Men kent hierdoor alle de diagonalen der zijvlakken van het overeenstemmende parallelopipedum. De hoeken tusschen deze diagonalen zullen wezen de hoeken α, β, γ, en indien men aanneemt, dat a is de kleinste en c_1 de grootste der zijden, zoodat men tevens hebbe $a < a_1 < b < b_1 < c < c_1$, zal men gemakkelijk vinden.

$$Cos.\ \alpha = \frac{c^2 + c_1^2 - (b^2 + b_1^2)}{8\,a a_1};$$

$$Cos.\ \beta = \frac{c^2 + c_1^2 - (a^2 + a_1^2)}{8\,b b_1};$$

$$Cos.\ \gamma = \frac{b^2 + b_1^2 - (a^2 + a_1^2)}{8\,c c_1}.$$

4. Hierdoor vindt men de hoeken tusschen de zijden der zijvlakken van het overeenstemmende parallelopipedum, dat is de hoeken tusschen drie aangrenzende ribben, en deze zijn gelijk aan de *hoeken tusschen de assen der paraboloïden.* De uitkomsten dezer berekening zijn:

Sin.

$$Sin.\, a\mathrm{D}b = Sin.\,(\mathrm{P},\Pi) = \frac{2aa_1\ Sin.\,\alpha}{\sqrt{\{(a^2+a_1^2)^2-4a^2a_1^2\,Cos.^2\alpha\}}};\ Cos.\,(\mathrm{P},\Pi) = \frac{a_1^2-a^2}{\sqrt{\{(a^2+a_1^2)^2-4a^2a_1^2\,Cos.^2\alpha\}}}.$$

$$Sin.\, a\mathrm{D}d = Sin.\,(\mathrm{P},\pi) = \frac{2bb_1\ Sin.\,\beta}{\sqrt{\{(b^2+b_1^2)^2-4b^2b_1^2\,Cos.^2\beta\}}};\ Cos.\,(\mathrm{P},\pi) = \frac{b^2-b_1^2}{\sqrt{\{(b^2+b_1^2)^2-4b^2b_1^2\,Cos.^2\beta\}}}.$$

$$Sin.\, b\mathrm{D}d = Sin.\,(\Pi,\pi) = \frac{2cc_1\ Sin.\,\gamma}{\sqrt{\{(c^2+c_1^2)^2-4c^2c_1^2\,Cos.^2\gamma\}}};\ Cos.\,(\Pi,\pi) = \frac{c_1^2-c_2}{\sqrt{\{(c^2+c_1^2)^2-4c^2c_1^2\,Cos.^2\gamma\}}}.$$

Bij welke berekening de hoeken α, β, γ voorondersteld zijn te wezen de scherpe hoeken tusschen de diagonalen der zijvlakken. Hiermede overeenkomstig zou dan de hoek (P,π) stomp zijn, omdat de teller $(b^2-b_1^2)$ der waarde van $Cos.\,(\mathrm{P},\pi)$ negatief is, uithoofde van $b_1 > b$.

5. Men kan nu, in het hoekpunt D, een bol plaatsen, hebbende de éénheid tot radius. Daardoor zal er een bolvormige driehoek bestaan, welks zijden zullen wezen de, in art. 4 berekende, hoeken, en welks hoeken niet verschillen van (P'), (Π'), (π'). Met behulp van bekende theoremata of formulen der Spherische Trigonometrie zal men dan eindelijk verkrijgen

$$Tang.^2\,\tfrac{1}{2}\,(\mathrm{P}') = \frac{p'_1}{p_1} = \frac{Cos.\,\{(\mathrm{P},\Pi)-(\mathrm{P},\pi)\} - Cos.\,(\Pi,\pi)}{Cos.\,(\Pi,\pi) - Cos.\,\{(\mathrm{P},\Pi)+(\mathrm{P},\pi)\}}$$

$$Tang.^2\,\tfrac{1}{2}\,(\Pi') = \frac{p'_2}{p_2} = \frac{Cos.\,\{(\mathrm{P},\Pi)-(\Pi,\pi)\} - Cos.\,(\mathrm{P},\pi)}{Cos.\,(\mathrm{P},\pi) - Cos.\,\{(\mathrm{P},\Pi)+(\Pi,\pi)\}}$$

$$Tang.^2\,\tfrac{1}{2}\,(\pi') = \frac{p'_3}{p_3} = \frac{Cos.\,\{(\mathrm{P},\pi)-(\Pi,\pi)\} - Cos.\,(\Pi,\mathrm{P})}{Cos.\,(\mathrm{P},\Pi) - Cos.\,\{(\mathrm{P},\pi)+(\Pi,\pi)\}}$$

In deze formule zijn de parameters van elke paraboloïde beteekend door de letters p_1, p'_1; p_2, p'_2; p_3, p'_3. Met behulp van dezelve, en van die der beide vorige artikels, worden nu gevonden de meer bijzondere betrekkingen tusschen de grootte dezer parameters, in de navolgende bijzondere gevallen.

6.

6. I GEVAL. Wanneer twee der overstaande zijden van den scheelen vierhoek gelijk zijn, bijv. a en a_1 zoo *liggen de assen der paraboloiden* P en Π *in een zelfde vlak en maken een regten hoek* met elkander (§ 8, art. 2 en § 7, art. 6). Men heeft alsdan

$$\frac{p'_1}{p_1}=\frac{Sin.(P,\pi)-Cos.(\Pi,\pi)}{Sin.(P,\pi)+Cos.(\Pi,\pi)};\ \frac{p'_2}{p_2}=\frac{Sin.(\Pi,\pi)-Cos.(P,\pi)}{Sin.(\Pi,\pi)-Cos.(P,\pi)};\ \frac{p'_3}{p_3}=\frac{Cos.[(\Pi,\pi)-(P,\pi)]}{Cos.[(\Pi,\pi)+(P,\pi)]}.$$

Men zou hierin de waarden van *Sin.* (P, π) enz. in art. 4 gevonden, kunnen substitueren, maar de daaruit voortkomende zamengestelde formule doet geene belangrijke bijzonderheden kennen. Het *eenige belangrijke* der uitkomst, bestaat in de symmetrische wijze, waarop de verhouding der parameters van elke der paraboloiden P en Π gevonden wordt door de hoeken, welke hare assen met die van de derde paraboloïde maken.

7. II GEVAL. Wanneer twee der overstaande zijden regthoekig over elkander liggen, zoodat b. v. hoek α = 90° is, alsdan zullen (§ 8, art. 3) *de assen der beide* paraboloiden P en Π *in een zelfde vlak gelegen zijn, zonder nogtans regthoekig* te wezen. De betrekkingen tusschen de parameters zullen minder eenvoudig zijn dan in het voorgaande geval; maar stelt men bovendien $a = a_1$ (als waarbij een der zijvlakken van het overeenstemmende parallelopipedum een *vierkant* zal worden), alsdan dienen dezelfde formulen van het I GEVAL, welke nu, na de substitutie van de waarden *Sin.* (P,π), *Cos.* (Π,π) enz. eenigzins eenvoudiger, doch overigens niet merkwaardiger worden.

8. III GEVAL. *Twee der rigtvlakken loodregt op elkander staande*, b. v. de rigtvlakken van P, *zoo is* deze paraboloïde *eene regte conoïde*. De driehoek, door welke de betrekkingen tusschen de parameters van de twee andere paraboloïden, in art. 5, opgemaakt zijn en moeten worden, is alsdan *regthoekig*. Men zal tusschen de hoeken, welke de assen der drie paraboloïden met elkander maken, de bekende betrekking hebben:

$$Cos.\ (\Pi,\pi) = Cos.\ (P,\Pi).\ Cos.\ (P,\pi),$$

en

en met deze zullen de waarden van $\frac{p'_2}{p_2}$, $\frac{p'_3}{p_3}$, uitgedrukt in art. 5, eenigzins kunnen vereenvoudigd worden. Evenwel leidt deze vereenvoudiging geenszins tot eene belangrijke uitkomst.

9. IV Geval. Laten er twee paren van overstaande zijden gelijk wezen, b. v. $a = a_1$ en $b = b_1$ *alsdan zijn* de paraboloïden Π en π *regte conoïden; de as van* P *is gerigt volgens het midden van* c en c_1, *en zij staat* loodregt *op elke der assen van* Π en π, *terwijl hare top in het* middelpunt *des scheelen vierhoeks zal gelegen wezen* (§ 7, art. 8 en 9, en § 8, art. 5). Men zal nu klaarblijkelijk hebben:

$$Tang.^2 \tfrac{1}{2} (P') = Tang.^2 \tfrac{1}{2} (\Pi, \pi);$$

$$\text{dat is } \frac{p'_1}{p_1} = \frac{2\ Sin.^2 \frac{1}{2} (\Pi, \pi)}{2\ Cos.^2 \frac{1}{2} (\Pi, \pi)} = \frac{1 - Cos. (\Pi, \pi)}{1 + Cos. (\Pi, \pi)}.$$

Substituerende de waarde van $Cos. (\Pi, \pi)$ uit art, 4, en daarin de waarde van $Cos.^2 \gamma$, uit art. 3, zoo wordt

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{\sqrt{\{16 (c^2 + c_1^2)^2 - 4 (b^2 - a^2)^2\}} - 4 (c_1^2 - c^2)}{\sqrt{\{16 (c^2 + c_1^2)^2 - 4 (b^2 - a^2)^2\}} - 4 (c_1^2 - c^2)}.$$

Deze betrekking is merkwaardiger, indien $a = b$ is, want zij gaat alsdan over in de zeer eenvoudige reden $\frac{c^2}{c_1^2}$. *Indien derhalve vier zijden van eenen scheelen vierhoek,* welke, *twee* aan *twee,* overstaande zijden zijn, *eene gelijke lengte hebben, zullen twee der overeenkomstige paraboloïden regte conoïden wezen, en de betrekking tusschen de quadraten der twee overige zijden des vierhoeks zal de betrekking tusschen de* parameters *van de derde* paraboloïde *uitdrukken.*

10. Ware, in een ander geval, $a = a_1$, $b = b_1$ en $\gamma = 90°$, dat is c *loodregt gerigt over* c_1, alsdan zou men evenèens vinden

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{c^2}{c_1^2}.$$

In

In dit geval hebben de *beide regte conoïden* Π en π *een gemeenschappelijken top* (§ 8, art. 6), *en hare assen liggen in een zelfde vlak.* Maar dit geval kan niet onderscheiden wezen van het laatste, in art. 9 aangevoerde; want men overreedt zich ligtelijk, dat, als van een parallelopipedum twee der zijvlakken regthoeken zijn ($a = a_1$ en $b = b_1$), en het derde eene ruit is ($\gamma = 90°$), alsdan *die regthoeken gelijke bases en hoogten moeten hebben,* en dienvolgens ook *even groote diagonalen,* dat is $a = a_1 = b = b_1$. Men kan hieruit ook besluiten, dat, *als van een scheelen vierhoek vier zijden, twee* aan *twee* over elkander staande, *dezelfde lengte hebben, de* twee *overige zijden* regthoekig *over elkander gerigt zullen wezen;* en omgekeerd, *wanneer van een scheelen vierhoek* twee *overstaande zijden* regthoekig *over elkander liggen, en dat de beide overstaande zijden van elk der twee andere paren even lang zijn, ook alle de vier zijden van deze twee andere paren onderling eene* gelijke *lengte zullen hebben.*

11. V Geval. Wanneer de overstaande zijden a en a_1 en b, b_1 regthoekig over elkander liggen, heeft men $\alpha = 90°$ en $\beta = 90°$; *twee der aangrenzende zijvlakken zullen nu* ruiten *wezen,* en daar dit niet mogelijk is, zonder dat ook het derde zijvlak eene *ruit* zij, zoo moet, als $\alpha = 90°$ en $\beta = 90°$ is, ook $\gamma = 90°$ zijn. Wanneer deze voorwaarden de eenige zijn, zoo verkrijgt men voor de betrekkingen der parameters van de drie *onderscheidene* paraboloïden, drie verschillende, doch symetrieke uitdrukkingen, welke evenwel ingewikkeld zijn, en tot geene belangrijke gevolgtrekkingen aanleiding geven. Maar bijaldien de drie aangrenzende zijvlakken van de overeenkomstige rhomboïde, *gelijke* en *gelijkvormige* ruiten zijn, zal men bovendien hebben $b = c = a$ en $b_1 = c_1 = a_1$, en de verhouding der parameters zal nu uitgedrukt worden door de formulen

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{p'_3}{p_3} = \frac{2a^2 - (a_1^2 - a^2)}{2a^2 + (a_1^2 - a^2)} \; ; \qquad \frac{p'_2}{p_2} = \frac{2a^2 + (a_1^2 - a^2)}{2a^2 - (a_1^2 - a^2)}.$$

Men

Men besluit hieruit (hetgeen in § 8, art. 9 reeds is opgemerkt, doch niet regtstreeks bewezen) *dat de drie paraboloïden* P, Π en π *gelijk en gelijkvormig zullen wezen, maar dat de paraboloïde* Π, *ten opzigte van de paradoloïden* P *en* π, *in eene* omgekeerde stelling *zal geplaatst zijn*. Bovendien blijkt uit de formulen van art. 4, dat, voor $\alpha = \beta = \gamma = 90°$; $a = b = c$; $a_1 = b_1 = c_1$, *de hoeken tusschen de assen der* paraboloïden Π en P, Π en π *gelijk zijn, maar dat de hoek*, tusschen de assen van P en π, *het supplement der beide andere is*. Gevolgelijk is *de paraboloïde, welke zich*, met betrekking tot de beide anderen, *in eene omgekeerde stelling bevindt, tevens die, welker as mèt de assen der beide andere paraboloïden gelijke hoeken maakt*.

12. VI Geval. Wanneer alle de overstaande zijden, *twee aan twee*, of ook *alle onderling*, gelijk zijn, zullen de drie paraboloïden *regte conoïden* wezen, *hebbende het centrum van den scheelen vierhoek tot gemeenschappelijk toppunt*. In het tweede der opgenoemde gevallen zullen bovendien *de drie regte conoïden gelijk* en *gelijkvormig, en ook eveneens geplaatst, zijn*. Het overeenstemmende parallelopipedum, in het eerste geval een *regthoekig* doch *ongelijkzijdig parallelopipedum* zijnde, zal, in het tweede geval, *gelijkzijdig*, en alzoo *een cubus*, wezen, en de zes zijden van den regelmatigen scheelen vierhoek zullen de zes ribben van een *tetraëdrum* of regelmatig viervlak vormen. Deze omstandigheid geeft aanleiding, om de *volstrekte* grootte der *parameters* van *de conoïden*, door zeer eenvoudige berekening, te bepalen.

13. Want laat ABCD, (fig. 11) een *tetraëdrum* voorstellen. Vereenigende het midden F van eenige ribbe AC met het midden G der tegenoverstaande ribbe BD, zoo is FG de rigting der voorname middellijn of as van *ééne* der *drie regte conoïden* (§ 7, art. 12 en § 8, art. 7 en 8). Het midden O van de lijn FG is het centrum van den om- en ingeschreven bol, en derhalve ook het centrum van den scheelen vierhoek, dat is *het gemeenschappelijke toppunt der* drie *conoïden*. De conoïde, welke FG tot as heeft, zal AD en BC of AB en CD tot rigtlijnen heb-

ben. C en A zijn derhalve punten van deze conoïde, maar het zijn tevens punten, gelegen in een der voorname middenvlakken van de conoïde. Want trekkende BZ, in het vlak der basis ABD, evenwijdig aan AD, en DZ evenwijdig aan AB, en latende door BC en BZ, alsmede door CD en DZ, vlakken gaan, zoo heeft men de beide rigtvlakken der bedoelde conoïde. Het vlak, deelende den standhoek dezer rigtvlakken midden door, zal, omdat ABZD een rhombus is, door de lijn AGZ, en daarom ook door AC gaan: maar zoodanig vlak is een der voorname middenvlakken; ergo is het vlak AGC het middenvlak, en de punten A en C liggen in hetzelve. Even zoo liggen de punten B en D in het tweede voorname middenvlak der conoïde. Van ééne der *parabolische rigtlijnen* van de conoide (§ 1, art. 2) is dienvolgens O de top; FO is een gedeelte der voorname middellijn of as; en A, C zijn twee punten van die rigtlijn, behoorende tot dezelfde abscis OF. Daarom is de parameter $p = CF^2 : OF$. Noemende de ribbe van het tetraëdrum a, zoo is $CF = \frac{1}{2} a$, en voor OF vindt men $\frac{1}{2} FG = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} a \sqrt{2}$; weshalve $p = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ = *de regthoekszijde van den gelijkbeenigen regthoekigen driehoek, hebbende eene der ribben van het tetraëdrum tot hypothenusa.* Het *brandpunt* ligt op *de helft* van OF, dat is op $\frac{1}{4}$ van FG, en van de tegengestelde of wederkeerige parabolische rigtlijn zal het brandpunt op *de helft* van OG gelegen zijn. (5)

14.

(5) Wanneer men de drie *regte conoïden* in het tetraëdrum beschreven denkt, zoo bestaan er, tusschen deze oppervlakken en de zijvlakken van het tetraëdum, zekere ligchamelijke ruimten, welke tot den ligchamelijken inhoud van het tetraëdrum zeer eenvoudige betrekkingen hebben. Met de oppervlakken, van deze *conoïden* afgesneden door de twee paren van overstaande ribben, welke als rigtlijnen der conoïden kunnen aangemerkt worden, is dit geenszins het geval; de vierkante inhouden dezer oppervlakken hebben, tot den inhoud van eenig zijvlak des tetraëdrums, geene eenvoudige noch meetbare betrekkingen. In het algemeen kunnen de inhouden dezer oppervlakken niet bepaald worden, dan door middel van reeksen, of met behulp van *elliptische functiën*. Maar de bedoelde ligchamelijke inhouden laten zich naauwkeurig bepalen, ook zonder het gebruik der differentiaal- en

14. Eene soortgelijke eenvoudige uitkomst bestaat klaarblijkelijk niet, wanneer de zijden van den scheelen vierhoek, hoezeer *twee* aan *twee* gelijk, nogtans onderling *niet* gelijk zijn. Evenwel is de berekening van de *volstrekte* grootte der parameters van de drie conoïden, welke, in dit geval, voortgebragt worden, mede eenvoudig. Daartoe moet men

---

integraal-rekening, gelijk dit, onder anderen, bekend is uit de berekeningen van aardenwerken, bij welke de gedeelten van een gebogen terrein of van gebogen afhellingen, enz. aangemerkt worden als tot het oppervlak van eene hyperbolische paraboloïde te behooren, of van hetzelve niet veel af te wijken.

Laat ABCD (*fig.* 12) een Tetraedrum zijn, hebbende de ribbe AB in een horizontaal vlak, en de overstaande ribbe CD evenwijdig aan dat horizontale vlak. Door CD denke men een verticaal vlak, snijdende AB in het midden F, en de zijvlakken ABC, ABD volgens de lijnen CF en DF, loodregt op AB. Men vereenige het midden E van CD met het midden F van AB, door de lijn EF, welke zal wezen eene verticale lijn, metende den kortsten afstand tusschen AB en CD. Merkt men nu AF en CE aan als rigtlijnen, en laat men AE, als beschrijvende lijn, over dezelve bewegen, van A naar F en van E naar C, zoodat de snelheden van A en E, langs AF en CE, gelijk zijn, alsdan ontstaat er een gedeelte eener *regte conoïde*, en *de inhoud van het ligchaam, begrepen tusschen dit oppervlak en de vlakken der driehoeken* AFE, CFE, zal juist *de helft wezen van den ligchamelijken inhoud der* pyramide CEFA.

Laat men de beschrijvende lijn nu over CE en FB bewegen, van F naar B en van C naar E; daarna uit den stand EB, van B weder naar F, en van E naar D, over BF en ED als rigtlijnen; en eindelijk, uit den stand FD naar den stand AE, over ED en FA als rigtlijnen, van D naar E en van F naar A, zoo ontstaan er *vier deelen* van *even zoo vele* gelijke en gelijkvormige *conoïden*, snijdende elkander volgens 6 lijnen (namelijk volgens de overstaande ribben AB, CD van het tetraëdrum, en volgens de *lijnen* AE, CF, BE, DF, welke uit de vier hoekpunten naar het midden van genoemde ribben getrokken kunnen worden), en een *symmetrisch* ligchaam vormende, welks *inhoud juist gelijk is aan* ½ *van den inhoud des* tetraëdrums. De horizontale en verticale projectiën van dit ligchaam zijn in *fig.* 13 voorgesteld. De lijnen, gaande door het midden van AB, CD; AE, BE en CF, DF, snijden elkander in een zelfde punt, zijnde het middelpunt van het tetraëdrum, *maar tevens het zwaartepunt des ligchaams.* De *conoïden*, binnen welke genoemde ligchamelijke ruimte bestaat, zijn geheel onderscheiden van die, welke in den tekst zijn overwogen; hare assen zullen wel invallen met de lijnen G*g*, H*h*, van de korste afstanden der overstaande zijden of ribben, welke niet gediend hebben voor het beschrijven

men slechts berekenen, in eenig middenvlak der conoïden, de coördinaten van het punt, in hetwelk dit middenvlak door éénе der rigtlijnen van de conoïde gesneden wordt, in de vooronderstelling dat de as der conoïde is de as der abscissen, en hare top de oorsprong der regthoekige coördina-

---

der conoïden, maar *de toppen zullen onderscheiden wezen, en gelegen zijn op het midden der lijnen* O G, O *g*, O H, O *h* (zie bepaaldelijk de horizontale projectie in *fig.* 13.)

Ten aanzien van de *drie conoïden* welke de overstaande ribben A B, C D; B C, A D; A C, B D van een *tetraëdrum* A D C B (*fig.* 14) tot rigtlijnen hebben, en welke elkander, zoo volgens die rigtlijnen, als volgens derzelver assen G H, E F, I K, onderling snijden, en O tot gemeenschappelijken top hebben, zal men, door berekening, de navolgende uitkomsten verkrijgen.

1°. Het gebogen oppervlak van *elke* conoïde begint bij of met eene der ribben, b. v. bij de ribbe B D (voor de conoïde, welke A B en C D tot rigtlijnen heeft) en strekt zich uit tot de overstaande ribbe A C. *Dit oppervlak nu deelt het geheele tetraëdrum juist midden door.*

2°. De *twee* regte conoïden, welke A D en B C, A B en C D tot rigtlijnen, en D B of A C tot beschrijvende lijnen hebben, snijden elkander (behalve in de rigtingen B D en A C) volgens de lijn I K. De inhoud van het ligchaam, begrepen tusschen het grondvlak A D C en de pas genoemde conoïden, zoo ver deze zich van A D en C D tot de lijn I K uitstrekken, is *juist gelijk* $^{1}/_{4}$ *van den inhoud des tetraëdrums.* Voor elk der overige zijvlakken A B D, A B C, B D C bestaat een soortgelijk ligchaam, en E F, G H kunnen eveneens als snijlijnen beschouwd worden.

3°. De *drie* conoïden, welke elkander volgens de lijnen O F, O G, O K snijden, en tegen de zijden A D, A C, C D van het vlak A D C grenzen, vormen, met dit vlak A D C, een ligchaam, hebbende A D C tot grondvlak, O tot toppunt, en, als het ware, drie gebogene zijvlakken G D F O, G O K A en K O F C. *De inhoud van dit ligchaam is het* $^{7}/_{48}$, dat is ruim $^{1}/_{7}$ *van den inhoud des geheelen tetraëdrums.* Er zijn *vier* soodanige ligchamelijke figuren, welke tusschen de zijvlakken van het tetraëdrum, en de oppervlakken der conoïden, gevormd worden.

4°. De genoemde gebogene zijvlakken G O K A en K O F C zijn ook gedeelten van het oppervlak des ligchaams onder No. 2 uitgedrukt, en daar de inhoud van hetzelve is $^{1}/_{4}$ of $^{12}/_{48}$ van den inhoud des tetraëdrums, zoo blijkt, dat er van dit ligchaam, door de *derde conoïde*, een stuk wordt afgesneden, begrepen tusschen de begrensde gebogene oppervlakken G D F O, I O F D, I O G D, hetwelk *een inhoud zal hebben* = $^{5}/_{48}$ *des inhouds van het tetraëdrum.*

dinaten. Zulks nu is, door middel van het overeenstemmende regthoekige parallelopipedum, zeer gemakkelijk, en het zal genoeg zijn, de uitkomsten der berekening hier te vermelden. Steeds dezelfde notatiën als boven aannemende, zoo is

1° De *parameter* $p_1 = p'_1$ van de *regte conoïde* P, hebbende $a = a_1$ of $b = b_1$ tot rigtlijnen

$$= \frac{(b^2 + c^2 - a^2)\sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)}}{\{\sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)}\}.\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}} \times \sqrt{2}.$$

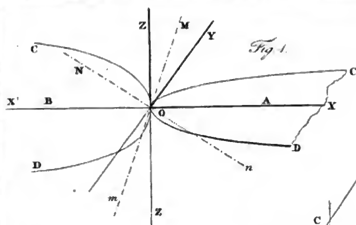
2° De *parameter* $p_2 = p'_2$ van de *regte conoïde* Π, hebbende $a = a_1$ of $c = c_1$ tot rigtlijnen,

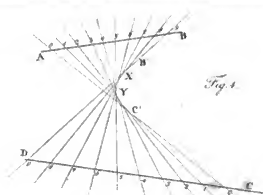
$$= \frac{(b^2 + c^2 - a^2)\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}}{\{\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)} + \sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)}\}.\sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)}} \times \sqrt{2}.$$

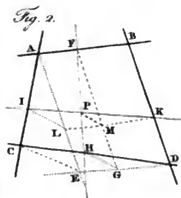
3° De *parameter* $p_3 = p'_3$ der *regte conoïde* π, hebbende $b = b_1$, of $c = c_1$ tot rigtlijnen,

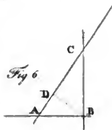
$$= \frac{(a^2 + c^2 - b^2)\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)}}{\{\sqrt{(a^2 + b^2 - c^2)} + \sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)}\}.\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)}} \times \sqrt{2}.$$

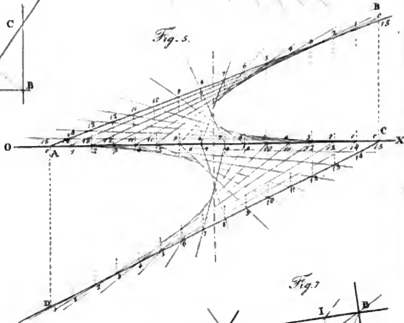
Alle welke parameters $= \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ worden, zoodra b en c van a niet verschillen.

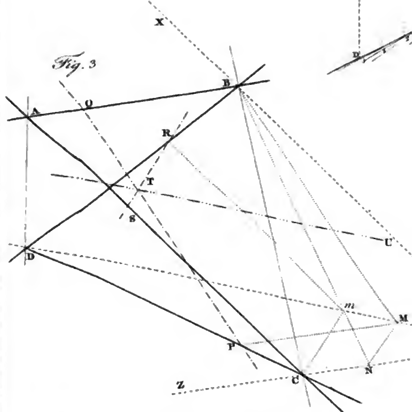

Fig. 1.
Z
M
Y
C
N
C
X'
B
A
X
O
D
D
n
m
Z

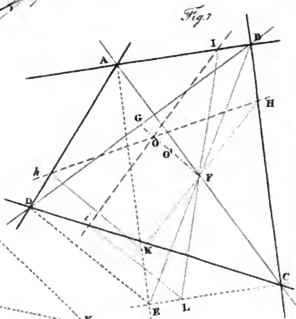

Fig. 4.
A
B
B
X
Y
C'
D
C

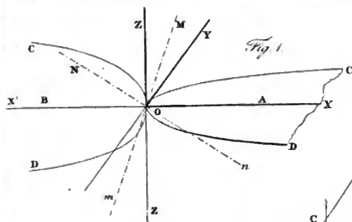

Fig. 2.
A
F
B
I
P
K
L
M
C
H
D
E
G

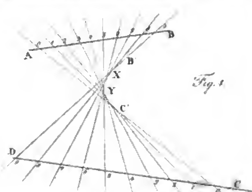

Fig. 6.
C
D
A
B

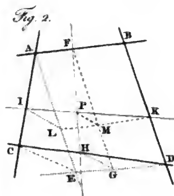

Fig. 5.
B
C
O
A
X
D

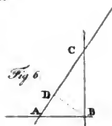

Fig. 3.
X
A
O
B
R
T
S
U
D
m
M
P
Y
N
Z
C

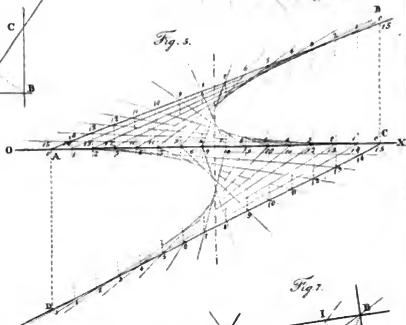

Fig. 7.
A
I
B
H
G
O
O'
h
F
D
K
C
E
L

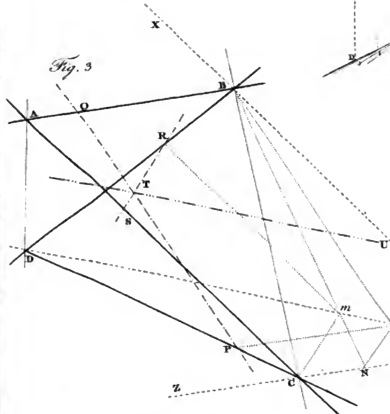

Fig. 1.
Z
M
Y
C
N
C
X'
B
A
X
O
D
D
n
m
Z

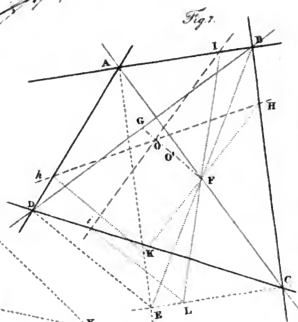

A
B
B'
X
Y
C'
D
C

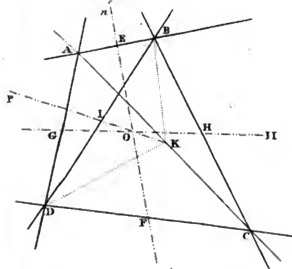

Fig. 2.
A
F
B
I
P
K
L
M
C
H
D
E
G

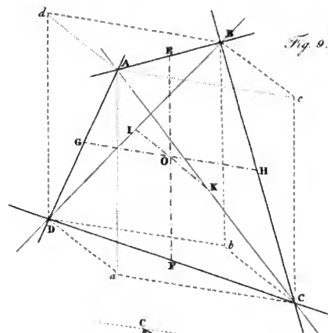

Fig. 6
C
D
A
B

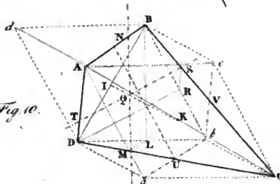

Fig. 5.
B
O
A
C
X
D

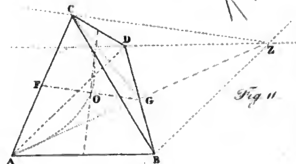

Fig. 3
X
B
A
O
R
T
S
U
D
m
M
P
Y
N
C
Z

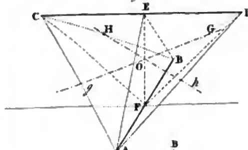

Fig. 7.
I
B
A
H
G
O
O'
h
F
D
K
C
E
L

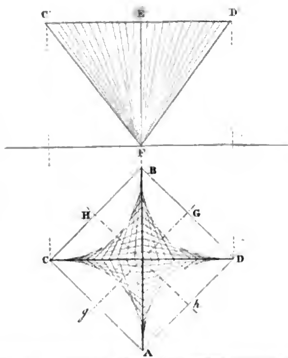

Fig. 8.
n
A
E
B
P
I
G
O
H
K
H
D
F
C

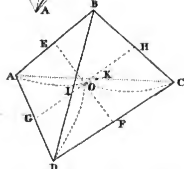

d
B
E
A
Fig. 9.
c
I
G
O
H
K
D
b
F
a
C


d
B
N
A
S
c
I
R
V
O
Fig. 10.
T
K
b
D
L
M
U
C
a


C
D
Z
F
O
G
Fig. 11
A
B


Fig. 12
C
E
D
H
G
B
O
g
h
F
A


C
E
D
Fig. 13.
F
B
H
G
C
D
g
h
A


B
E
H
A
K
C
O
L
Fig. 14.
G
F
D

NIEUWE VERHANDELINGEN

DER

EERSTE KLASSE

VAN HET

KONINKLIJK-NEDERLANDSCHE INSTITUUT.

DERTIENDE DEEL.

VERHANDELING

OVER DE

LEMNISCATEN.

DOOR

Gideon Jan

G. J. VERDAM,

Hoogleeraar te Leiden.

AMSTERDAM,
C. G. SULPKE.
1847.

BIJDRAGE

TOT DE

BESCHOUWING DER LEMNISCATEN,

DOOR

G. J. VERDAM.

De *Lemniscaten* of kromme lijnen, welke den vorm hebben van een *strik*, of van het cijfer *acht*, in eene horizontale rigting geschreven (∞), schijnen het eerst aan eene meer bepaalde beschouwing onderworpen te zijn door eene opmerking van JACOB BERNOUILLI.

Bij een onderzoek betrekkelijk de constructie der kromme lijn van gelijkmatige nadering en verwijdering, door LEIBNITZ ter bepaling voorgesteld, en door hem genoemd *curva isochrona paracentrica*, zocht BERNOUILLI deze constructie, — eerst uit de rectificatie der *elastische kromme* afgeleid — bij voorkeur uit de rectificatie eener algebraïsche kromme lijn te verkrijgen, en kwam ook tot eene kromme lijn, hebbende tot vergelijking

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

De figuur dezer kromme lijn is gelijk aan die van een strik; BERNOUILLI noemde ze daarom *Lemniscata*. Te regt merkte hij op, «dat deze » kromme lijn onder de kromme lijnen van den vierden graad eene zeer » voorname plaats verdiende. Na den cirkel, de parabola en logarithmica,

 be-

» behoorde de lemniscata op dezelfde lijn te staan met de ellips en hyper» bola, omdat zij, óf alleen, óf met eene der laatst genoemde, de constructie » aangeeft van mechanische kromme lijnen, welke, door hulp der eerstge» noemde, niet kan verkregen worden; dit is b. v. het geval met de *iso» chrona paracentrica*, en ook met de kromme der *lamina elastica*. » (*Acta Erud.* 1694, en *Opera* Jac. Bern. I. pag. 608 sqq.)

Ten aanzien van het onderzoek dezer laatste is men ook veel aan Jacob Bernouilli verschuldigd, en daar hij voor de differentiaal-aequatie eener elastische kromme lijn, onder bepaalde voorwaarden, gevonden had eene vergelijking, welke kan aangemerkt worden als te bestaan uit het verschil van twee andere, de eerste tot de rectificatie der ellips, de tweede tot die der lemniscata betrekking hebbende, leidde hij daaruit op zeer gepaste wijze af, hoe eenige ordinaat der *lamina* zou kunnen gevonden worden door het verschil van een' elliptischen en lemniscatischen boog.

Bernouilli toonde het wezen der *lemniscata*, en een paar gevallen van aanwending dezer kromme lijn in wiskundige bespiegelingen, als het ware slechts ter loops, aan. Hij bleef niet opzettelijk bij de beschouwing dezer kromme lijn verwijlen. Dit geschiedde ongeveer 50 jaren later; eerst door Fagnano, kort daarop door Euler. Beide deze wiskundigen hebben inzonderheid het onderwerp der *rectificatie* van de lemniscata uitvoeriglijk onderzocht, en zijn daardoor tot belangrijke uitkomsten gekomen, welke het bepalen van gelijke, van veelvoudige of van evenmatige bogen leeren. Eenige eigenschappen der lemniscata, hare wording uit de gelijkzijdige hyperbool, hare quadratuur, involutie, enz., waren ook onderzocht en gevonden, en Legendre — een oogenblik op deze kromme lijn lettende — wees later aan, dat hare bogen eigenaardige meetkundige voorstellingen zijn van de elliptische functiën der eerste soort, mits de modulus hebbe de bepaalde waarde van $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Veel meer toch zegt Legendre er niet van, en de wijze, waarop hij de zaak ontvouwd heeft, is mij — even als zijne bekende transformatie der formule voor de rectificatie der hyperbola — steeds zeer gedwongen voorgekomen; het een zoowel als het ander is voor meer natuurlij-

lijke of minder gedwongene ontwikkeling vatbaar; maar het betoog daarvan behoort niet te dezer plaatse.

Een' geruimen tijd scheen het, alsof de beschouwing der *lemniscata* van BERNOUILLI, of, meer algemeen, de beschouwingen der lemniscatische kromme lijnen, ten einde waren, althans geene uitbreiding verdienden, totdat zij, in de laatste jaren, wederom de opmerkzaamheid trokken, en thans, bij herhaling, de ernstige bemoeijing van geachte wiskundigen doen blijken. De fransche wiskundige SERRET heeft zich inzonderheid deze beschouwingen ten doel gesteld; hem is gevolgd de engelsche wiskundige ROBERTS; en ook CHASLES en LIOUVILLE nemen deel in de behandeling van onderwerpen, welke tot dezelfde theorie behooren. SERRET is meer opzettelijk tot de beschouwing der lemniscatische kromme lijnen gekomen, door zijn onderzoek nopens de meetkundige voorstelling der elliptische functiën van de eerste soort. Het eerst trof zijne opmerking de voorstelling der beide euleriaansche integralen, waarbij hij de lengte van het quadrant der lemniscata van BERNOUILLI uitdrukte door eene *gamma*, hebbende tot radix $\frac{1}{4}$, dat is door de functie $\Gamma(\frac{1}{4})$, hetgeen trouwens van zelf lag opgesloten in het verband, tusschen de euleriaansche integralen en de elliptische functiën bestaande, en door LEGENDRE aangewezen; gelijk LEGENDRE bovendien, in het tweede deel van zijn *Traité des fonct. ellipt.*, heeft geleerd, dat de functiën, welke de rectificatie der *lemniscata* en der *curva elastica* geven, ook vervangen kunnen worden door bepaalde euleriaansche integralen der eerste soort. SERRET lette vervolgens op het verband tusschen de vergelijkingen zoo der lemniscata als van den cirkel en der gelijkzijdige hyperbola, onder polaire coördinaten. Daar die van den cirkel, hebbende $\frac{1}{2}a$ tot radius, de pool in den omtrek en de middellijn, welke door deze pool gaat, tot as, voorgesteld wordt door

$$r = a\cos.t,$$

of wel door

$$r^1 = \frac{(2a)^1}{2}\cos.1.t,$$

 en

en die van de lemniscaat, hebbende de pool in den knoop, hare as tot vaste lijn of as voor de telling der bogen t, en a tot zoogenaamden brandpunts-afstand, is

$$r^2 = \frac{(2a)^2}{2} \cos. 2t,$$

kwam hij van zelf tot de beschouwing van het verband tusschen de uitdrukking der lengte van de omtrekken der kromme lijnen, meer algemeen tot vergelijking hebbende

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos. mt,$$

(tot lemniscaten van hoogere orde behoorende), en de euleriaansche integraal $\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)$, welke beschouwing hem tot hoogst belangrijke uitkomsten voerde.

Later heeft hij meermalen andere deelen van dit onderwerp, of van aanverwante punten, onderzocht en uitvoerig behandeld. Inzonderheid verdient genoemd te worden zijn onderzoek der zoogenaamde *Cassinoïden*, van welke hij aantoonde, dat derzelver rectificatie elke elliptische functie der eerste soort — voor elken willekeurigen modulus — oplevert, terwijl dit onderzoek slechts eene inleiding was tot dat der cassinoïden van hoogere orde, begrepen in de aequatie

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos. mt + a^{2m} = b^{2m}.$$

Roberts heeft eenige vertoogen gegeven over de *sphaerische lemniscata*, zoowel over die, welke op het sphaerisch vlak eveneens ontstaat, gelijk de cassinoïde op een plat vlak, als over die, welke men heeft uit de snijding van een' bol en van een' kegel. Ten aanzien der laatste is hij, onder vele wetenswaardige gevolgtrekkingen, gekomen tot dit resultaat, dat men door de bogen van deze sphaerische lemniscata de meetkundige voorstellingen heeft van al de gewone elliptische functiën, zoowel van die der *tweede* en *derde* als van die der *eerste soort*.

Al deze en andere ontwikkelingen vindt men in de laatste deelen van

van het bekende *Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par* Liouville (deel VII — XI). Een der vertoogen van serret treft men ook aan in het *Cambridge and Dublin mathematical journal, new series*, vol. I. Ik verwijs hier op die ontwikkelingen, van welke ik slechts eenige weinige der merkwaardigste uitkomsten vermeldde, daar het noch in mijn plan ligt, noch tot verklaring van mijn voornemen behoort, noch tot bereiking van mijn doel gevorderd wordt, eene analyse van het bedoelde onderzoek te geven.

Onder hetgeen ik reeds vroeger in mijne adversaria opteekende, behoorden ook bijzonderheden, welke tot de beschouwing der lemniscaten betrekking hadden. Eenige denkbeelden werden ontwikkeld, en gaven geene onbelangrijke resultaten. Van anderen moest ik mij met de eenvoudige aanteekening, met een *pro memoria*, vergenoegen, om later, bij meerdere tijds-beschikking, de stof vollediger te bewerken. Het is er verre af, dat ik zou kunnen zeggen, in het weinige, dat ik meer ontwikkeld had aangeteekend, even belangrijke waarheden te hebben betoogd, als die, welke door bovengenoemde wiskundigen zijn aan het licht gebragt. Maar ik zou kunnen aantoonen, dat mij niet alles nieuw was, hetgeen ik in hunne vertoogen of verhandelingen ontwikkeld aantrof. Eerder evenwel wil ik en mag ik van eenige andere beschouwingen gewagen, welke men noch bepaaldelijk ontwikkeld, noch ook vermeld vindt, of van welke de gezigtspunten anders en algemeener hadden kunnen zijn gekozen geworden. Oorspronkelijk stelde ik mij voor, zoowel de behandeling van onderscheidene punten, die de *lemniscata* van Bernouilli en de cassinoïde betreffen, als eene beschouwing van andere merkwaardige lemniscaten. Van dat voornemen heb ik nogtans afgezien, eensdeels uit hoofde der te groote uitbreiding, welke mijne bijdrage daardoor zou verkijgen, andersdeels om bijzondere redenen, welker vermelding hier onnoodig is.

Meer eenvoudige gedeelten van het onderwerp voorbijgaande, en een te lang verwijl bij enkele punten eveneens willende nalaten, bepaal ik mij diensvolgens voornamelijk, hoezeer niet geheel uitsluitend, om het een en an-

ander over wording en verwantschap van lemniscatische kromme lijnen aan te stippen, en ten aanzien van sommige dezer lemniscaten eenige uitkomsten van berekening te doen kennen, door welke aan derzelver beschouwing zekere plaats in de wiskundige analyse toekomt.

---

§ I.

De gewone lemniscata is eene lijn van den vierden graad, van welke de vergelijking geen' standvastigen term en alleenlijk de evene magten der elementen bevat; bovendien is deze vergelijking volstrekt homogeen, en houdt slechts één parameter in; waarom dan ook alle zoodanige lemniscaten gelijkvormig zijn. Wanneer men van de algemeene vergelijking der kromme lijnen van de derde orde, dat is der lijnen van den vierden graad, die termen uitzondert, in welke de onevene magten van de elementen, of wel der orthogonale coördinaten x en y, voorkomen, zal de overblijvende uitdrukking eene vergelijking van den vierden graad wezen, tot onderscheidene vormen van kromme lijnen behoorende, naar gelang de coëfficienten andere betrekkingen tot elkander hebben. Onder die vormen heeft ook de *cassinoïde* eene plaats; andere vormen, aan dien der cassinoïde verwant, en ook in figuur aan die der cassinoïde nabijkomende, vindt men er eveneens onder. Stelt men, in de vergelijking der gewone of eenvoudige cassinoïde, den standvastigen term $= 0$, zoo heeft men de vergelijking der gewone *lemniscata*. Maar gelijk van de eerstgenoemde soort van kromme lijnen de eenvoudige cassinoïde een bijzondere vorm is, zoo is de gewone *lemniscata* slechts eene bijzonder vorm eener andere soort van lijnen des vierden graads, verwant met de eerstbedoelde soort, en van deze eenvoudiglijk daarin onderscheiden, dat hare algemeene vergelijking geenen standvastigen term inhoudt. Zoodanige vergelijking behoort tot symmetrische kromme lijnen, onder welke men er meerdere opmerkt, die een eigenlijk gezegden lemniscatischen vorm hebben.

De

De vergelijking dezer andere soort van kromme lijnen, onder welke zich meer bepaaldelijk lemniscaten bevinden, zou derhalve in het algemeen wezen

$$a x^4 + b y^4 + c x^2 y^2 + d x^2 + e y^2 = 0 \ .$$

Maar zoo deze vergelijking werkelijk eene lemniscata geeft, is de coördinaten-oorsprong in den knoop, en de abscissen-as langs de as der kromme lijn gerigt. Deze plaatsing en de symmetrische figuur der kromme brengen mede, dat al de termen van dezelfde afmeting zijn, wanneer men zoowel op de parameters let als op de elementen, en dat bovendien de vergelijking kunne verdeeld worden in twee groepen van termen, van welke de eene volkomen quadraat is. Ergo wordt de algemeene vierde-magts-aequatie, welke de zoogenaamde middelpunts-aequatie van onderscheidene lemniscaten kan wezen, meer bepaaldelijk

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)^2 = \alpha^6 x^2 + \beta^6 y^2 \ , \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ (1)$$

kunnende de hier aangenomen coëfficienten zoowel negatief als positief wezen, en elk derzelve uit het product van evene-magtsfactoren bestaan.

Deze vergelijking kan derhalve tot lemniscatische kromme lijnen behooren, maar zij behoort er niet uitsluitend toe; gelijk blijken zal, bevat zij ook de vergelijkingen van andere kromme lijnen, met de lemniscaten verwant. Evenwel is het zeer gemakkelijk om den vorm der vergelijking (1) nog nader te begrenzen, zoodat zij eerder tot de eigenlijke lemniscaten betrekking heeft. Want daartoe moet met $x = 0$ overeenstemmen $y = 0$ en $y = \pm p \sqrt{-1}$ en met $y = 0$, moet $x = 0$ en $x = \pm q$ (eene bestaanbare waarde) zijn, hetgeen plaats heeft zoo men stelt:

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2)^2 = \alpha^6 x^2 - \beta^6 y^2 \ \ldots \ldots \ldots \ldots \ (2)$$

waaruit men ook, voor $a^2 = b^2 = 1$, en voor $\alpha^6 = \beta^6 = c^2$ (zijnde c zekere parameter), de vergelijking der gewone lemniscata heeft.

Maar van alle lemniscaten zijn de vergelijkingen niet uitsluitend begrepen in de vergelijking (2); want men ziet ligtelijk in, dat ook eene homogene en symmetrische zesde of achtste magts-aequatie, enz. tot eene

krom-

kromme lijn van lemniscatischen vorm betrekking kan hebben. Men kan dus de lemniscaten onderscheiden als kromme lijnen van dezelfde klasse, maar van verschillende orde. Die, van welke de vergelijking is van den vierden graad, zijn van de *eerste orde;* die van de *tweede orde* hebben eene zesde magts-vergelijking, enz. Nogtans heeft hier plaats, hetgeen bij andere kromme lijnen van verschillende orde veelal geene plaats kan vinden, te weten, dat, alleenlijk door zekere betrekkingen van coëfficienten, eenige lemniscata van hoogere orde in eene andere van lagere orde kan overgaan.

Gelijk verder blijken zal, kan men zich de wording van lemniscaten op onderscheidene wijzen voorstellen; voor elke lemniscata zal deze hier bedoelde wording, hetzij dan geometrische, hetzij mechanische, steeds bijzonder wezen. Men kan echter aan alle lemniscaten eene zelfde wijze van meetkundige wording toekennen. Want men heeft voor de centrale poolvergelijking der gewone lemniscata

$$r^2 = a^2 cos . 2\varphi ,$$

indien namelijk a de halve grootste middellijn der kromme is, r de voerstraal en φ de hoek of boog, tusschen die middellijn en den voerstraal. Tevens is de polaire middelpunts-aequatie der gelijkzijdige hyperbola, hebbende a tot halve as , ρ en φ tot polaire coördinaten, en met de lemniscata concentrisch zijnde,

$$\rho^2 = \frac{a^2}{cos . 2\varphi} .$$

Ergo, gelijk bekend was, is het product der voerstralen r en ρ, welke tot een' zelfden hoek φ behooren, standvastig. Neemt men echter de gemeenschappelijke as a dezer beide kromme lijnen als eenheid van lengte, zoo is, in het polaire coördinaten-stelsel, de lemniscata van BERNOUILLI de *omgekeerde kromme* der gelijkzijdige hyperbola. — In het regthoekig stelsel zou de omgekeerde kromme eener gelijkzijdige hyperbola eene regte lijn wezen of kunnen wezen. — Deze hyperbola heeft tot asymptoten de raaklijnen der lemniscata, welke door den knoop gaan. Zoo men derhalve eene

eene kromme lijn denkt, hebbende eene hyperbolische gedaante, en minstens twee symmetrische takken tusschen twee asymptoten (die elken willekeurigen hoek kunnen insluiten), zal de *omgekeerde* dezer hyperbolische lijn eene lemniscata moeten wezen, moetende de benaming van *omgekeerde kromme* verstaan worden in den zin, welke in eene mijner vroegere bijdragen is beteekend of aangenomen. Van welke orde of van welken graad zoodanige hyperbolische kromme dan is, altijd zal hare omgekeerde eene lemniscata wezen, of een afzonderlijk deel van zuiver lemniscatischen vorm bezitten. *Alle lemniscaten zijn dus omgekeerd-hyperbolische kromme lijnen.* De hyperbolen, welke de lemniscaten van de *eerste* orde tot omgekeerde kromme lijnen hebben, zijn in het algemeen van de *derde* orde, dat is, zij hebben eene zesde-magts-vergelijking; voor de gewone lemniscata is nogtans de hyperbola van de eerste orde.

De gewone lemniscata wordt ook gezegd te zijn de kromme lijn der voetpunten van de normalen, uit het centrum eener gelijkzijdige hyperbola op hare raaklijnen nedergelaten. Het is duidelijk, dat aan andere lemniscaten eene gelijkvormige wording uit hyperbolische lijnen toekomt, en dat men derhalve ook, hiermede overeenkomstig, de lemniscatische kromme lijnen zou kunnen bepalen.

Zij de aandacht eenige oogenblikken meer bijzonder gevestigd op de lemniscaten van de eerste orde. Hare vergelijkingen zijn begrepen in de vergelijking (2); — men neme echter meer algemeen de vergelijking (1). Deze is, in polaire coördinaten uitgedrukt,

$$r^2 = \frac{\alpha^6 - (\alpha^6 - \beta^6)\, sin.^2\, \varphi}{[a^2 - (a^2 - b^2)\, sin.^2\, \varphi]^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

of ook

$$r^2 = 2\, \frac{(\alpha^6 + \beta^6) + (\alpha^6 - \beta^6)\, cos.\, 2\varphi}{\{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\, cos.\, 2\varphi\}^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Eenvoudiger zou men kunnen stellen

$$r^2 = \frac{(2)^2}{2} \cdot \frac{p + q\,.\,cos.\, 2\varphi}{(c + d\,.\,cos.\, 2\varphi)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

 De-

Deze goniometrische functie bevat alzoo de polaire vergelijkingen der mogelijke lemniscaten van de eerste orde. Men zou nog andere vormen van goniometrische functieën kunnen stellen, of uit de hier bepaalde kunnen afleiden, zoo zij slechts tusschen twee grenzen $\varphi = 0$ en $\varphi = \mu$ onafgebroken bestaat, voor $\varphi = 0$ eene eindige waarde erlangt, voor $\varphi = \mu$ *nul* wordt, van af $\varphi = \mu$ tot $\varphi = 180° - \mu$ onbestaanbare waardijen geeft, en van daar tot $\varphi = 180°$ wederom dezelfde uitkomsten oplevert als in het eerste quadrant. Nog zou men de vergelijking in dier voege kunnen zamenstellen, dat de opvolgende waarden van r in het tweede en derde quadrant, hoezeer onafgebroken aangroeijende, nogtans van de overeenkomstige in het eerste en vierde quadrant verschilden; de oplossing van r zou daarbij van die eener volkomene tweede-magts aequatie afhangen, en de vergelijking zou tot de niet symmetrischen lemniscaten behooren. Eindelijk, gelijk SERRET opzigtelijk de vergelijkingen der lemniscata van BERNOUILLI en der *Cassinoïde* aannam, zou men ook hier kunnen denken aan alle kromme lijnen, welker vergelijkingen begrepen zijn in de formule

$$r^m = z^{m-1} \frac{M + N \cos. m\varphi}{(P + Q \cos. m\varphi)^m}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

maar deze hebben voor $m > 2$ meer dan twee strikken; het zijn veelvoudige lemniscaten, en derzelver beschouwing ligt voor het tegenwoordige buiten mijn plan.

Hoezeer sommige der lemniscaten, welker vergelijkingen begrepen zijn in de formule (3) of (4), eigenschappen bezitten of kunnen bezitten, welke van genoegzame belangrijkheid zijn om gekend te worden, zoo is hier, bij een algemeen onderzoek, de bepaling der quadratuur, en inzonderheid der rectificatie, meest belangrijk. De laatste toch is, in den regel, afhankelijk van elliptische integralen, en kan dus nieuwe voorbeelden van de meetkundige voorstelling dier integralen opleveren.

Belangende de quadratuur, zoo ziet men gereedelijk in, dat deze volkomen bepaald is, men heeft toch

$$\partial I = \tfrac{1}{2} r^2 . \partial\varphi, \qquad \text{en}$$

en wanneer men het tweede lid der vergelijking (4) met $\frac{1}{2}\partial\varphi$ of met $\frac{1}{4}\partial \,.\, 2\varphi$ multipliceert, zal dit lid volstrekteljjk integreerbaar zijn, zoodat *alle lemniscaten van de eerste orde eene volkomene of bepaalde quadratuur hebben.* In de oorspronkelijke vergelijking (2) — of, algemeener, in de vergelijking (1) — zijn de coëfficienten van x^2 en y^2 gesteld α^6, β^6; deze vorm komt aan die coëfficienten toe; doch het is overigens om het even, hoe of zij in berekeningen beteekend worden. Men zou ze, als in de vergelijking (5), p en q kunnen noemen; doch voor de symmetrie met de andere coëfficienten a^2 en b^2, stelle men die coëfficienten α^2 en β^2; daardoor is dan

$$r^2 = 2\,\frac{(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi}{\{(a^2+b^2) + (a^2-b^2)\cos.2\varphi\}^2} \,\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Bijaldien $(a^2+b^2) > (a^2-b^2)$ is, hangt de quadratuur af van een' cirkelboog; maar van een logarithmus in het tegengestelde geval.

Dat grooter of kleiner zijn van (a^2+b^2) ten opzigte van (a^2-b^2), hangt af van het teeken $+$ of $-$ der termen, welke a^2 en b^2 tot coëfficienten hebben. Bij eenige straks te behandelen voorbeelden, zullen a^2 en b^2 steeds het positieve teeken voor zich hebben, en in deze vooronderstelling wordt de formule voor den geheelen inhoud der ruimte, door de vier quadranten der kromme lijn ingesloten,

$$I = \frac{1}{a^2b^2}\left\{\frac{(\alpha^2b^2-\beta^2a^2)\sin.2\mu}{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\cos.2\mu} + \frac{\alpha^2b^2+\beta^2a^2}{ab}\,.\,Boog\,tang.(=\frac{b}{a}tang.\mu)\right\} (8)$$

in welke formule de boog μ is de grootste waarde, welke de polaire abscis φ in het eerste quadrant kan verkrijgen, en zoo de kromme eene eigenlijke lemniscata is, zal μ wezen de boog, metende den hoek tusschen de as of grootste middellijn der lemniscata, en eene der beide raaklijnen, gaande door den knoop.

Met de rectificatie is het geheel anders gelegen. Deze is geenszins zoo bepaald. In het algemeen zou zij door de methode der quadraturen, kunnen volbragt worden; maar ook is zij door *ultra-elliptische* of *Abelsche* in-

integralen bepaald, en in eenige gevallen loopt zij door berekening van gewone elliptische functieën af. De rectificatie-formule is van een' zamengestelden vorm, en verhoudt zich aldus:

$$\partial s = \frac{\partial \varphi . \sqrt{2}}{\{(a^2+b^2) + (a^2-b^2)\cos.2\varphi\}^2 . \sqrt{\{(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi\}}} \times$$

$$\sqrt{\Big\{[(a^2+b^2) + (a^2-b^2)\cos.2\varphi]^2 . [(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi]^2}$$

$$+\Big[2(a^2\beta^2 - \alpha^2 b^2) + (a^2-b^2)[(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi]\Big]^2 \sin.^2 2\varphi\Big\} \quad (9)$$

De herleiding dezer integraal slaagt onder anderen in de navolgende gevallen:

1° Als men heeft $\alpha = 0$, mits β^2 positief.
2° Zoo $\beta = 0$ is, mits α^2 positief.
3° Indien $a^2\beta^2 = \alpha^2 b^2$, of $a^2 : b^2 = \alpha^2 : \beta^2$ is.
4° Wanneer $\alpha^2 = \beta^2$ is, of $\alpha^2 - \beta^2 = 0$.
5° $a^2 = b^2$, dat is $a^2 - b^2 = 0$, of ook $a^2 + b^2 = 0$.
6° $a = 0$ of $b = 0$, en $\beta^2 = -\alpha^2$.

De drie eerste gevallen eischen geene breedvoerige ontwikkeling, daar zij tot de rectificatie der kegelsneden behooren.

Als men heeft $\alpha = 0$, wordt $\sqrt{\{(\alpha^2+\beta^2) + (\alpha^2-\beta^2)\cos.2\varphi\}} = \beta \sin.\varphi \sqrt{2}$; hierdoor wordt reeds het integreren aanmerkelijk verligt; maar het polinomium, onder het wortelteeken in den teller der differentiaal-uitdrukking voorkomende, wordt mede eenvoudiger, en wel, na alle herleidingen, eene zesde-magts-uitdrukking van den derden-magts-vorm, welke onmiddelijk tot dien eener elliptische functie kan gebragt worden.

Is $\beta = 0$, zoo heeft met geringe wijziging hetzelfde plaats. Bestaat er tusschen de coëfficienten eene gelijke verhouding, zoodat $a^2\beta^2 = \alpha^2 b^2$ is, alsdan kan de wortelvorm in den teller der vergelijking (9) gedeeld worden door den wortelvorm, in den noemer voorkomende; deze laatste ver-

vervalt daarbij, en de overblijvende vorm is tot den elliptischen gemakkelijk herleidbaar.

Maar het onmiddelijk terug brengen der rectificatie tot elliptische integralen houdt alsdan aan de omstandigheid van het positief zijn van β^2, of daaraan, dat β^2 en b^2 gelijke teekens hebben. Want daarbij wordt het tweede lid der vergelijking (1), aldus geschreven,

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=\alpha^2x^2+\beta^2y^2\ ,$$

of een volkomen vierkant, of een factor van het eerste lid, en de kromme lijnen, tot welke deze vergelijking, in de opgenoemde drie eerste gevallen, behoort, zijn alzoo kegelsneden, en wel ellipsen of hyperbolen.

De drie laatste gevallen zijn minder eenvoudig; achtervolgens zullen zij hier overwogen worden.

A. Men neme in de eerste plaats aan dat $\alpha^2=\beta^2$ zij, of $\alpha^2-\beta^2=0$, en beschouwe derhalve β^2 als het positieve teeken voor zich hebbende in de oorspronkelijke vergelijking, zoodat deze zij:

$$(a^2x^2+b^2y^2)^2=\alpha^6(x^2+y^2)\ , \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

waardoor de poolvergelijking (3) een volkomen quadraat worden zal, en dienvolgens oplevert:

$$r=\pm\frac{\alpha^3}{a^2-(a^2-b^2)\,sin.^2\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

De formule (8) voor den inhoud geeft

$$\mathrm{I}=\tfrac{1}{2}\pi\,.\,\frac{\alpha^6}{a^3b^3}(a^2+b^2)\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Voor de lengte van een boog wordt de formule (9)

$$\partial s=\frac{2\,\alpha^3\,\partial\varphi}{\{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\,cos.\,2\varphi\}^2}\times$$

$$\times\sqrt{\left\{[(a^2+b^2)+(a^2-b^2)\,cos.\,2\varphi]^2+4\,(a^2-b^2)^2\,sin.^2\,2\varphi\right\}}$$

=

$$=\frac{a^2\,\partial\varphi}{\{a^2-(a^2-b^2)\,sin.^2\,\varphi\}^2}\times$$

$$\times\sqrt{\left\{a^4+2\,(a^2-b^2)\,(a^2-2\,b^2)\,sin.^2\,\varphi-3\,(a^2-b^2)^2\,sin.^4\,\varphi\right\}}\,.$$

Deze uitdrukking wordt ligtelijk tot eene elliptische functie herleid. Men deele teller en noemer door $cos.^4\,\varphi$, zoo komt

$$\partial s=\frac{a^2\,\partial\,.\,tang.\,\varphi}{\{a^2\,(1+tang.^2\,\varphi)-(a^2-b^2)\,tang.^2\,\varphi\}^2}\times$$

$$\times\sqrt{\left\{a^4+[4\,(a^2-b^2)^2+2\,a^2\,b^2]\,tang.^2\,\varphi+b^4\,tang.^4\,\varphi\right\}}$$

$$=\frac{a^2\,\partial\,.\,tang.\,\varphi}{\{a^2+b^2\,tang.^2\,\varphi\}^2}\sqrt{\left\{(a^2+b^2\,tang.^2\,\varphi)^2+4\,(a^2-b^2)^2\,tang^2\varphi\right\}}.$$

Stellende nu $tang.\,\varphi=\frac{a}{b}\,tang.\,\frac{1}{2}\,(90^\circ+\psi)$, zoo komt men tot

$$\partial s=+\tfrac{1}{2}a^2.\,\partial\psi\,\frac{\sqrt{(a^4-a^2\,b^2+b^4)}}{a^2\,b^2}\sqrt{\left\{1-\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2+(a^2-b^2)^2}sin.^2\psi\right\}}\,(13)$$

zijnde eene *elliptische functie van de tweede soort.*

Daar de kromme lijn, hebbende de uitdrukking (10) tot vergelijking, geheel en al symmetrisch is ten opzigte der assen van x en y, zullen de grenzen van den hoek φ, in de vergelijking (11), zijn $\varphi=0$ en $\varphi=90^\circ$. Met $\varphi=0$ en $\varphi=90^\circ$ stemmen overeen $\psi=-90^\circ$ en $\psi=+90^\circ$. Ergo zal men, om de lengte van $\frac{1}{4}$ des omtreks van de kromme lijn te bepalen, mooten berekenen de *complete* functie der tweede soort, behoorende tot de formule (13), en daarna de uitkomst verdubbelen.

De kromme lijn, hebbende de uitdrukking (10) of (11) tot vergelijking, heeft dan dit merkwaardige, dat hare bogen, even als die eener ellips, zekere meetkundige voorstellingen zijn van de elliptische integralen der tweede soort. De vorm van de kromme lijn komt ook min of meer den elliptischen vorm nabij; eigenlijk evenwel is de kromme een ingedrukt ovaal,

ovaal, hoedanig eene ellips, welke men, ter plaatse van de toppen der kleine as, indrukte, of even als eene veer naar binnen boog, wezen zou. Later zal van een oppervlak worden gewaagd, hebbende kromme lijnen, gelijkvormig of gelijksoortig met de onderwerpelijke, tot voorname snijdingen; maar zij staat ook in eenig verband met de ellips, en het is niet ongepast, hier te doen opmerken, waarin deze betrekking gelegen is.

Men denke eene ellips, hebbende b tot halve *groote*, en a tot halve *kleine* as; de groote as zij horizontaal gerigt, of liever, deze as $2b$ zij de onveranderlijke rigting, van welke de standhoeken der voerstralen gerekend worden, bijaldien dan die standhoeken door φ, en deze voerstralen door ρ beteekend worden, zal de centrale pool-vergelijking dezer ellips wezen

$$\rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - (a^2 - b^2)\, sin.^2\, \varphi} \; .$$

Vergelijkende deze uitdrukking met (11), zoo blijkt, dat

$$r = \pm \frac{\alpha^3 \rho^2}{a^2 b^2} = \pm \frac{\alpha^2}{a^2} \cdot \frac{\alpha}{b} \cdot \frac{\rho^2}{b} = \pm \frac{\alpha^3}{b^2} \cdot \frac{\alpha}{a} \cdot \frac{\rho^2}{a}$$

is. Op elken voerstraal der ellips bestaat derhalve een voerstraal der voorgestelde kromme lijn, en men vindt dezen voerstraal, door eerst te construeren eene derde evenredige p tot b en ρ of tot a en ρ; daarna eene vierde evenredige tot a, α en p of b, α en p, en eindelijk deze vierde evenredige te verlengen of te verkorten in reden van α^2 tot b^2 of van α^2 tot a^2. Zeer eenvoudig wordt de constructie, indien $\alpha = a$ of $= b$ is; want dan is $r = \pm \frac{a}{b} \cdot \frac{\rho^2}{b}$, of $= \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{\rho^2}{a}$, en de kromme zou gelijkvormig zijn aan die, welker voerstralen derde evenredige zijn tot a of b en ρ.

Is $\alpha = a$, zoo valt de kromme lijn geheel binnen de ellips; maar deze ligt binnen de kromme lijn voor $\alpha = b$. Is $\alpha^3 = a^2 b$, dan vallen de horizontale toppen der kromme, dat is de uiteinden van hare groote of horizontale as, zamen met de toppen der groote as van de ellips; maar de top-

toppen van de kleine of dwarsche as van het beschouwde ovaal vallen steeds binnen de ellips.

Het hier ontwikkelde bestaat in de vooronderstelling van $\alpha^2 = \beta^2$ (of eigenlijk $\alpha^6 = \beta^6$) en van β^2 positief. Ware het negatieve teeken voor β^2 geplaatst, dan zou de kromme lijn, tot vergelijking hebbende

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^2 = \alpha^6(x^2 - y^2), \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

meer onmiddelijk tot het onderwerp van beschouwing dezer Bijdrage behooren. Zij zou namelijk eene *lemniscata* wezen. Deze lemniscata heeft met die van BERNOULLI de eigenschap gemeen, dat hare raaklijnen, welke door den knoop gaan, halve regte hoeken maken met de as. En zoo a is de halve as der laatstgenoemde lemniscata, en ook $\alpha = a$ is, zullen de beide lemniscaten elkander in de toppen en in den gemeenschappelijken knoop aanraken, maar overigens zal de eerste geheel en al binnen de laatste gelegen zijn. De inhoud der hier bedoelde lemniscata is bepaald door de uitdrukking

$$I = \frac{\alpha^6}{a^2b^2}\left\{1 + \frac{b^2 - a^2}{ab}\, Boog\ tang. \left(= \frac{b}{a}\right)\right\}, \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

maar, hoezeer de rectificatie-formule eenvoudiger wordt dan de boven gestelde algemeene formule (9), blijft zij in afmeting te hoog, om hare behandeling tot die eener gewone elliptische functie terug te brengen.

De vergelijking (10) kan nog behandeld worden in de vooronderstelling van b^2 negatief; zij heeft alsdan betrekking tot eene andere kromme lijn; maar de resultaten blijven, met uitzondering van de formule (12), meerendeels gelden, mits $+b^2$ in $-b^2$ en $-b^2$ in $+b^2$ veranderende. In formule (13) wordt hierdoor wel is waar de modulus der functie *grooter* dan één, doch eene bekende transformatie voert dadelijk tot eene gelijksoortige functie, welker modulus is *kleiner* dan één.

B. 1° Zij $a^2 = b^2$; b^2 *positief*; α^2 (of α^6) verschillend van β^2 (of β^6) en beide *positief*.

De

De vergelijking der kromme wordt

$$(x^2+y^2)^2=\frac{\alpha^6}{a^4}\left(x^2+\frac{\beta^6}{\alpha^6}y^2\right)$$

zij $\frac{\alpha^6}{a^4}=p^2$, $\frac{\beta^6}{a^4}=q^2$, zoo is de aequatie

$$(x^2+y^2)^2=p^2x^2+q^2y^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

De kromme lijn is die, welker punten zijn de voetpunten der normalen, uit het middelpunt eener ellips (hebbende $2p$ tot grootste en $2q$ tot kleinste middellijn) op de raaklijnen nedergelaten; zij is lang bekend geweest, doch het is mij niet gebleken, dat men op hare rectificatie eene bijzondere aandacht gevestigd heeft, evenzoo min als op die der zoogenaamde voetpunten-kromme lijn der hyperbolen, welke eene lemniscata is, waarover straks. Zij heeft, even als de eerste der kromme lijnen, boven, sub A, overwogen, de gedaante van een ingedrukt ovaal, of van een' der vormen van de *Cassinoïde*; hare beide regthoekige assen zijn gelijk aan die der ellips; zij raakt de ellips in de vier toppen, maar ligt overigens buiten de ellips; men rangschikt haar wel eens onder de lemniscaten.

De pool-vergelijking heeft den eenvoudigen vorm van

$$r^2=p^2-(p^2-q^2)\sin^2\varphi,$$

of, $p=1$, en de excentriciteit der ellips $=c$ stellende,

$$r^2=1-c^2.\sin.^2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

De inhoud der kromme lijn wordt, volgens de formule (8),

$$\mathrm{I}=\tfrac{1}{2}(p^2+q^2)\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

zijnde eene bekende uitdrukking, en beteekenende den inhoud des halven cirkels, welke de koorde van het elliptisch quadrant tot radius heeft.

Voor de rectificatie geeft de formule (9)

$$\partial s = \partial \varphi \sqrt{\left\{ \frac{(1-c^2 sin.^2 \varphi)^2 + c^4 sin.^2 \varphi \, cos.^2 \varphi}{1-c^2 . sin.^2 \varphi} \right\}}$$

$$= \frac{\partial \varphi \, \{1-c^2(2-c^2) \, sin.^2 \varphi\}}{(1-c^2 . sin.^2 \varphi) \, (1-c^2(2-c^2) \, sin.^2 \varphi)} \; .$$

Bijaldien men nu stelt $tang. \varphi = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2)}} . tang. \psi$, verkrijgt men:

$$\partial s = \frac{\partial \psi \, (1-c^2 \, sin.^2 \psi) \sqrt{(1-c^2)}}{\{(1-c^2) + c^2 sin.^2 \psi\} \sqrt{(1-c^2 sin.^2 \psi)}} \; \ldots\ldots \; (19)$$

Volgens deze formule is de rectificatie afhankelijk van het verschil eener elliptische functie van de *derde* en van de *eerste* soort. Doch men kan eenvoudiger herleiden, door aan te nemen

$$tang. \varphi = \frac{cot. \omega}{1-c^2} \; ;$$

want in deze vooronderstelling zal de berekening voeren tot:

$$\partial s = - \frac{(1-c^2)^{\frac{3}{2}} . \partial \omega}{\{1-c^2 \, (2-c^2) \, sin.^2 \omega\} \sqrt{(1-c^2 \, sin.^2 \omega)}} \; \ldots\ldots \; (20)$$

Het blijkt derhalve, dat de bogen van de beschouwde voetpuntenkromme lijn (men zou ze oneigenlijk *elliptische lemniscata* kunnen noemen) meetkundige voorstellingen zijn van *elliptische functiën* van de *derde soort*, hebbende een' *negatieven* parameter, welke begrepen zal wezen tusschen $-2c^2$ en -1. Volgens de formule (19) zou de parameter positief zijn; maar, gelijk in de theorie der elliptische functiën bewezen wordt, is de eene formule tot de andere herleidbaar met tusschenkomst eener goniometrische uitdrukking, even zoo als ook de functieën met negatieve parameters, grooter dan $-c^2$, herleidbaar zijn tot andere met parameters, die kleiner dan -1 zijn, doch bij tusschenkomst eener logarithmische uitdrukking.

Indien men de halve groote as p der oorspronkelijke ellips niet $= 1$ stelt, maar onbepaald laat, zal de formule (20) worden.

∂s

$$\partial s = -\frac{p^2 q^3 \,\partial\omega}{\{p^4-(p^4-q^4)\,sin.^2\omega\}\sqrt{\{1-\frac{p^2-q^2}{p^2}\,sin.^2\omega\}}} \quad . \; . \; . \; . \; (21)$$

Bijaldien de primitieve ellips een brandpunts-afstand heeft, juist gelijk aan de halve kleine as, wordt $c^2=\frac{1}{2}$, of $q^2=\frac{1}{2}p^2$, en alsdan is

$$\partial s = -\frac{p\,.\,\partial\omega\,.\,\frac{1}{4}\sqrt{2}}{(1-\frac{3}{4}\,sin.^2\omega)\sqrt{(1-\frac{1}{2}\,sin.^2\omega)}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22)$$

en in dit geval is derhalve de modulus der functie dezelfde als die der functie van de *eerste* soort, door middel van welke de rectificatie der bernouilliaansche lemniscata verkregen wordt, namelijk: modulus $=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Voor het quadrant der kromme lijn kan men, in de formulen (20)—(22), het negatieve teeken, vóór het tweede lid geplaatst, verwisselen met het positieve teeken, omdat de grenzen van ω zijn 0° en 90°, als die van den oorspronkelijken boog φ zijn 90° en 0°.

Maar voor het quadrant is nu ook de lengte afhankelijk van eene complete functie van de derde soort, en deze kan, volgens een theorema van LEGENDRE, berekend worden met behulp der functieën van de eerste en tweede soort. In de formule (20) is de parameter $-c^2(2-c^2)$, en wanneer $1-c^2=b^2$ wordt gesteld, zal b de complementaire modulus wezen; ergo wordt de parameter $=-(1-b^2)(1+b^2)=-(1-b^4)$ $=-1+b^4=-1+b^2\,.\,b^2$.

Wanneer de parameter eener functie van de derde soort is kleiner dan $-c^2$ en grooter dan -1, wordt hij voorgesteld onder den algemeenen vorm $-1+b^2\,.\,sin.^2\theta$; ergo is hier $sin.^2\theta=b^2$ en dus $sin.\theta=b$, $cos.\theta=c$. De formule nu van LEGENDRE voor de berekening eener complete functie van de derde soort, door middel van functieën der tweede en eerste soort, is, voor het geval dat de parameter tusschen de aangeduide negatieve grenzen ligt (1),

Π'

(1) Zie LEGENDRE *Traité des fonctions elliptiques*, Tome I, art. 112, page 138, of ook VERHULST, *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* § 56, page 103.

$$\Pi'(c) = F'(c) + \frac{\Delta(b,\theta)}{b^2 . sin.\theta . cos.\theta}\left\{\tfrac{1}{2}\pi + [F'(c) - E'(c)]\,F(b,\theta) - F'(c)\,E(b,\theta)\right\}.$$

En deze toepassende op de formule (20), zoo komt voor de lengte van het quadrant der elliptische lemniscata

$$S = b^2 F'(c) + \frac{1}{c}\,\Delta(b,\theta)\left\{\tfrac{1}{2}\pi + [F'(c) - E'(c)]\,F(b,\theta) - F'(c)\,E(b,\theta)\right\} \;.\;. (23)$$

In deze formule hebben F, E, F', E' de bekende beteekenissen, en $\Delta(b,\theta)$ is $= \sqrt{(1-b^2 \, sin.^2\theta)}$, en derhalve $= \sqrt{(1-b^4)} = c\sqrt{(1+b^2)}$.

Voor het bijzondere geval der formule (22), is $c = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $b = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ en $\theta = 45°$; ergo is dan de lengte van het quadrant, als men de lengte p der halve groote as van de oorspronkelijke ellips onbepaald laat,

$$S' = \tfrac{1}{2}p\sqrt{2}\,.\,F'(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) + \tfrac{1}{2}p\sqrt{6}\left\{\tfrac{1}{2}\pi + [F'(\sqrt{\tfrac{1}{2}}) - E'(\sqrt{\tfrac{1}{2}})]\,F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 45°) - F'(\sqrt{\tfrac{1}{2}})\,E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, 45°)\right\} \;.\;.\;. (24)$$

en deze formule laat zich nu, met behulp der elliptische tafelen van LEGENDRE, gemakkelijk, dat is onmiddellijk, zonder interpolatie, berekenen.

B. 2°. Is, in de oorspronkelijke vergelijking (1), $a^2 = b^2$, b^2 positief; α^6 verschillend van β^6, maar heeft β^6 het aftrekkings-teeken voor zich, dan is die vergelijking

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{\alpha^6}{a^4}x^2 - \frac{\beta^6}{a^4}y^2,$$

of, even als boven in de formule (16),

$$(x^2 + y^2)^2 = p^2x^2 - q^2y^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (25)$$

De kromme lijn is nu eene eigenlijke lemniscata, en zij is mede bekend als eene zoogenaamde voetpunten-kromme lijn; hare punten zijn namelijk de voetpunten der loodlijnen, getrokken uit het centrum eener hyperbola op derzelver tangenten, hebbende deze hyperbola eene eerste of werkelijke as $= 2p$ en eene dwarssche of imaginaire as $= 2q$. De as der lem-

lemniscata is mede $=2p$; de raaklijnen, gaande door den knoop, zijn de asymptoten der hyperbola, en vormen dus met de as een hoek, wiens goniometrische tangens $=\frac{q}{p}$ is. Voor het geval der gelijkzijdige hyperbola is deze hoek een halve regte hoek, en de lemniscata is dan dezelfde als die van BERNOUILLI; dit geval heeft derhalve plaats als $a^2=b^2$, β^4 negatief, en $\beta^4=a^4$ is.

De poolvergelijking dezer lemniscata is

$$r^2=p^2-(p^2+q^2)\,sin.^2\,\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (26)$$

of, de excentriciteit der hyperbola $=1$ stellende,

$$r^2=p^2-sin.^2\,\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (27)$$

De formule (8) voor de inhoudsberekening zal geven, vermits de grenzen van den boog φ zijn 0 en *boog tang.* $\left(=\frac{q}{p}\right)$,

$$I=\tfrac{1}{2}\,(p^2+q^2)\,sin.\,2\left[boog\,tang.\left(\frac{q}{p}\right)\right]+(p^2-q^2)\,boog\,tang.\left(\frac{q}{p}\right)$$

$$=pq+(p^2-q^2)\,boog\,tang.\left(\frac{q}{p}\right),\;\ldots\; (28)$$

welke uitdrukking bekend is, en overgaat in p^2 voor de lemniscata van BERNOUILLI.

Voor de rectificatie is, uit de formule (9),

$$\partial s=\frac{\partial\varphi\,\{p^4-(p^4-q^4)\,sin.^2\,\varphi\}}{\sqrt{\{p^2\{-(p^2+q^2)\,sin.^2\,\varphi\}\,\{p^4-(p^4-q^4)sin.^2\varphi\}}}\,.$$

De herleiding wordt verkregen door te stellen $tang.\,\varphi=\frac{p^2}{q^2}\,tang.\,\psi$, waardoor men zal vinden

$$\partial s=\frac{p^2\,q^2\,\partial\psi}{\{q^4+(p^4-q^4)\,sin.^2\,\psi\}\,\sqrt{\{q^2-(p^2+q^2)sin.^2\psi\}}}\,;$$

 hier-

hierin $\quad sin.^2 \psi = \frac{q^2}{p^2+q^2} sin.^2 \omega$ stellende, komt er eindelijk:

$$\partial s = \frac{p^2 q}{\surd(p^2+q^2)} \cdot \frac{\partial \omega}{\{q^2+(p^2-q^2) sin.^2 \omega\} \surd\{1-\frac{q^2}{p^2+q^2} sin.^2 \omega\}} \quad . \; . \; (29)$$

Neemt men de excentriciteit als éénheid, of $(p^2+q^2)=1$, zoo is

$$\partial s = p^2 \cdot \surd(1-p^2) \cdot \frac{\partial \omega}{[(1-p^2)+(2p^2-1) sin.^2 \omega] \surd\{1-(1-p^2) sin.^2 \omega\}}$$

$$= \frac{q^2}{\surd(1-p^2)} \cdot \frac{\partial \omega}{\{1+\frac{2p^2-1}{1-p^2} sin.^2 \omega\} \surd\{1-(1-p^2) sin.^2 \omega\}} \quad . \; . \; . \; (30)$$

Stelt men de ware as der hyperbola $=2$, dat is $p=1$, en verder $\frac{q^2}{p^2+q^2} = \frac{q^2}{1+q^2} = \gamma^2$, zoo gaat de formule (29) over in deze meer eenvoudige

$$\partial s = \frac{(1-\gamma^2)}{\gamma} \cdot \frac{\partial \omega}{\{1+\frac{1-2\gamma^2}{\gamma^2} sin.^2 \omega\} \surd\{1-\gamma^2 sin.^2 \omega\}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (29^*)$$

Het blijkt derhalve, dat de bogen der hier beschouwde lemniscata meetkundige voorstellingen zijn van elliptische functiën der derde soort. De *modulus* γ kan elke waarde hebben tusschen 0 en 1. De *amplitudo* ω kan zich niet uitstrekken van 0 tot 90°; want

$$sin.^2 \omega = \frac{p^2+q^2}{q^2} \cdot sin.^2 \psi$$

$$= \frac{p^2+q^2}{q^2} \cdot \frac{q^4 \cdot tang.^2 \varphi}{p^4+q^4 \cdot tang.^2 \varphi},$$

en daar de grenswaarde van $tang. \varphi$ is $=\frac{q}{p}$, zoo wordt die van

sin.

$$sin.^2 \omega = \frac{p^2+q^2}{q^2} \cdot \frac{q^6}{p^6+q^6} = \frac{\gamma^4}{1-3\gamma^2(1-\gamma^2)},$$

welke alleenlijk voor $p=q$, dat is alleenlijk bij de gelijkzijdige hyperbola, $=1$ kan worden. Het is dan ook hierom, dat de berekening der lengte van het lemniscatisch quadrant niet geschieden kan door middel der complete functie van de derde soort, althans niet onmiddelijk; want wel is waar, dat men, door in de formule (29*) te stellen

$$sin.^2 \omega = \frac{\gamma^4}{1-3\gamma^2(1-\gamma^2)} sin.^2 \lambda,$$

dezelve herleidt tot eene andere, in welke de grens van het argument λ is 90°, maar die andere formule is zamengestelder, en moet op hare beurt wederom tot elliptische integralen gebragt worden.

De parameter $\frac{1-2\gamma^2}{\gamma^2}$ kan zoowel positief als negatief zijn. Zoo lang γ^2 is $<\frac{1}{2}$ is deze parameter steeds positief. Voor $\gamma^2=\frac{1}{2}$ is hij *nul*; de functie van de derde soort gaat over in eene van de eerste soort; p wordt $=q$; en de formule (29*) is alsdan de bekende rectificatie-formule voor de gewone lemniscata. Wordt $\gamma^2<\frac{1}{2}$, zoo is de parameter >0, maar de grens voor de amplitudo ω wordt kleiner. Voor $\gamma^2=\frac{1}{3}$, heeft men een parameter $=1$, en $q^2=\frac{1}{2}p^2$. Voor γ^2 minder en minder dan $\frac{1}{2}$, wordt q kleiner en kleiner dan p, maar de parameter wordt grooter en grooter dan één. Dit aangroeijen heeft geene grenzen; de figuur der lemniscata wordt, bij het langer en langer worden van hare as in vergelijking van hare hoogte, meer en meer uitgerekt, en nadert de regtlijnige rigting van hare as.

Bijaldien $\gamma^2>\frac{1}{2}$ wordt, zal de parameter negatief zijn; evenwel zal deszelfs waarde niet tot het oneindig negatief kunnen toenemen; want voor γ^2 nabij $=1$, wordt de parameter nabij $=-1$, en zijne waarden liggen dus tusschen 0 en -1. In dit geval der negatieve parameters behooren de lemniscaten tot hyperbolen, welker eerste assen $2p$ kleiner zijn dan de

twee

tweede assen $2q$, en welke alzoo geacht kunnen worden te zijn de overeenstemmende of verwante hyperbolen van die, welker eerste assen $2p$ grooter zijn dan de tweede assen $2q$. Denkt men inderdaad bij elke hyperbola, tot welke eenige lemniscata behoort, tevens de overeenstemmende of verwante hyperbola (in de supplements-hoeken der asymptoten), zoo behoort ook tot deze eene lemniscata. Er bestaan, zoo doende, twee stelsels van lemniscaten, die men overeenstemmende, verwante, of ook wel *complementaire lemniscaten* zou kunnen heeten. Van het eerste stelsel hebben de rectificatie-formulen *moduli* kleiner dan $\frac{1}{2}$, *amplitudines*, welker grenzen beneden 45° blijven, en positieve *parameters*. Van het tweede stelsel zijn de *moduli* der functieën van de overeenkomstige lemniscaten juist de *complementen* ($\sqrt{(1-\gamma^2)}$) van de moduli der functiën van de lemniscaten des eersten stelsels, en de grenzen der *amplitudines* zijn mede de *complementen* der grenzen van de eerstgenoemde amplitudines; maar de *parameters* der functieën van het tweede lemniscaten-stelsel zijn negatief.

Zoo men derhalve voor eenige lemiscata heeft $tang.\,\varphi = \dfrac{q}{p}$, zal voor de complementaire lemniscata $tang.\,\varphi = \dfrac{p}{q}$ wezen. Deze wederkeerigheid levert eene eenvoudige betrekking tusschen de inhouden der beide lemniscaten op; want, door middel der formule (28), zal men bevinden: dat het verschil tusschen die inhouden gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi\,(p^2-q^2)$. Voor de lengte der bogen bestaat dergelijk eenvoudig verband niet.

B. 3°. Men kan nog opmerken het geval van $\alpha^2 = b^2$, maar b^2 negatief, zoodat $\alpha^2 + b^2 = 0$ zij; doch om eene eenvoudige en belangrijke uitkomst te verkrijgen, moet men nog aannemen $\alpha^6 = \beta^6$.

De vergelijkingen der kromme lijn worden, bij deze hypothesen,

$(x^2$

$$(x^2-y^2)^2 = p^2(x^2+y^2), \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= \frac{p^2}{\cos.^2 2\varphi}, \\ r &= \pm\frac{p}{\cos. 2\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

De kromme lijn is hyperbolisch en niet onbekend. Zij bestaat uit *vier* hyperbolische takken, rondom den oorsprong der coördinaten regelmatig gelegen, even als eene gelijkzijdige hyperbola en hare overeenstemmende (hyperbola), zoodat ook de lijnen, gaande door den oorsprong en makende halve regte hoeken met de assen, asymptoten van de vier takken zijn.

De rectificatie-formule geeft tot uitkomst:

$$\partial s = \tfrac{1}{2}p \,.\, \frac{\partial \,.\, 2\varphi}{\cos.^2 2\varphi} \sqrt{(1+3\sin.^2 2\varphi)};$$

dat is, stellende $2\varphi = 90° - \psi$,

$$\partial s = -p \,.\, \frac{\partial\psi}{\sin.^2\psi} \sqrt{(1-\tfrac{3}{4}\sin.^2\psi)} \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

waaruit

$$s = p\left\{-\tfrac{1}{4}F(\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\psi) + E(\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\psi) + \cot.\psi \,.\, \Delta(\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\psi)\right\} \quad \ldots (34)$$

In deze formule zijn de grenswaarden van ψ *nul* en 90°, of *nul* en $\frac{1}{2}\pi$; Δ heeft de gewone beteekenis $= \sqrt{(1-\frac{3}{4}\sin^2.\psi)}$. De formule geldt slechts voor een' der halve takken in eenig octant; voor de geheele uitgestrektheid van $\psi = 0$ tot $\psi = \frac{1}{2}\pi$, dat is, van $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ tot $\varphi = 0$ wordt s, zoo als behoort, oneindig.

De omgekeerde kromme dezer hyperbola van de tweede orde zal een' lemniscatischen vorm hebben. Evenwel is zij eene lemniscata met vier strikken, hoedanige hier minder opzettelijk overwogen worden; hare orthogonale coördinaten-vergelijking is ook van den zesden graad; zij is dus eene lemniscata van de tweede orde, en zou, wegens den vorm der vergelijking (eenigzins overeenkomende met dien der cubische parabola), *cubische lem-*

niscata kunnen genoemd worden. Den parameter p als eenheid beschouwende, zoo is de polaire coördinaten-vergelijking

$$\rho = \pm p \,.\, cos.\, 2\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (35)$$

Maar indien men de asymptoten der oorspronkelijke hyperbolische kromme als coördinaten-assen aanneemt (en deze zijn tevens de raaklijnen, gaande door den knoop der lemniscata), dan heeft men

$$\rho = \pm p \,.\, sin.\, 2\varphi \,,$$

en onder dezen vorm is de kromme lijn bekend, als tot eene kromme lijn van de vijfde orde te behooren. De inhoud van eenigen sector is bepaald door de uitdrukking $\frac{1}{4}p^2\left\{\frac{1}{4}sin.\,4\varphi+\varphi\right\}$, en dus wordt de inhoud van een der vier lemniscatische strikken $\frac{1}{8}p^2\pi$, dat is gelijk aan den halven cirkel, op de halve as p als middellijn beschreven.

De rectificatie geeft, met dezelfde notatie als boven voor de hyperbolische kromme lijn,

$$\partial s = -p\,\partial\psi\sqrt{(1-\tfrac{3}{4}sin.^2\psi)},\ \text{en}\ s = -p\,E(\tfrac{1}{2}\sqrt{3},\psi) \;.\;.\; (36)$$

Ergo heeft deze lemniscata het merkwaardige, dat, voor den modulus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ (hebbende alzoo tot hoek een' hoek van 60°), hare bogen eenvoudige meetkundige voorstellingen zijn van de gewone elliptische functieën der tweede soort; de lengte van een' der octanten is dan ook $= E'(\frac{1}{2}\sqrt{3})$.

Er bestaat eene blijkbare overeenkomst of verwantschap tusschen deze uitkomsten, en die, welke tot de gewone lemniscata en gelijkzijdige hyperbola betrekking hebben. De vergelijkingen namelijk van de gelijkzijdige hyperbola en van de lemniscata, die hare omgekeerde is, zijn, als men de excentriciteit der hyperbola $= 1$ stelt:

$$r'^2 = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{1}{cos.\,2\varphi'} \quad : \quad \rho'^2 = \tfrac{1}{2}\,.\,cos.\,2\varphi' \,,$$

waaruit gevonden wordt, zoo men $cos.\,2\varphi' = cos.^2\psi'$ stelt:

1°

1° Voor de lengte van een' boog der hyperbola, gerekend van eenige waarde van ψ' tot $\psi'=0$, dat is tot aan den top der hyperbola,

$$s' = tang.\,\psi'\,\Delta(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi') - E(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi') + \tfrac{1}{2}F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi')\,.$$

2° Voor de lengte van een' boog der lemniscata, bij dezelfde amplitudo,

$$s' = \tfrac{1}{2}F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi')\,.$$

Minder lettende op de coëfficienten, of op de moduli, dan wel op den vorm der vergelijkingen, zoo blijkt, dat de formulen voor de lengte der bogen van de gewone gelijkzijdige hyperbola en van die, welke hier genoemd is van de tweede orde, genoegzaam dezelfde gedaante hebben. Alleenlijk komt in de eerste $tang.\,\psi'$ voor, en in de tweede de omgekeerde waarde $cot.\,\psi'$, en in de eerste zijn de teekens van F en E tegengesteld aan die van F en E in de tweede; maar in de tweede wordt ook de amplitudo ψ' juist in eene tegengestelde rigting gerekend. Gelijk verder, in de rectificatie-formule der gelijkzijdige hyperbola, een term voorkomt $\tfrac{1}{2}F(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,,\psi')$, welke de rectificatie der overeenkomstige lemniscata geeft, zoo is er ook in de rectificatie-formule der hyperbola van de tweede orde een term $E(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,,\psi)$, welke de lengte eens boogs van even groote amplitudo der met deze hyperbola overeenstemmende lemniscata voorstelt.

Bij de gewone hyperbola (ongelijkzijdige) en lemniscata is

$$\rho_{,}\,. = r_{,}\,.\,cos.\,2\varphi\ ;$$

trekt men nu tot het punt der hyperbola, hebbende den voerstraal $r_{,}$, en de polaire abscis φ, eene raaklijn, en laat men, uit den oorsprong, op deze raaklijn eene loodlijn neder, zoo is het voetpunt dezer loodlijn een punt der lemniscata, en deze loodlijn $\rho_{,}$ maakt dus, aan de andere zijde der as van de lemniscata, een' hoek φ met dezelve, gelijk aan den hoek, welken de voerstraal $r_{,}$, aan gene zijde, met de as maakt. Hieruit volgt, dat de punten der lemniscata kunnen verkregen worden, zonder het trekken van raaklijnen tot de hyperbola. Men trekke namelijk uit het centrum der hyperbola, aan elke zijde der as, een' voerstraal, elk een' hoek φ met de as makende. Zoo men dan, uit het snijpunt van elken voerstraal met

de hyperbola, eene loodlijn op den anderen der beide voerstralen laat vallen, zal het voetpunt een punt der lemniscata wezen, en men verkrijgt dus, op deze wijze, steeds vier symmetrische punten der lemniscata, indien de voerstralen ook naar den anderen tak der hyperbola verlengd gedacht worden.

Hoezeer nu de punten der lemniscata van de tweede orde niet eveneens, door middel der overeenkomstige hyperbola van de tweede orde, verkregen worden, bestaat er toch eenige overeenkomst in de constructie. Men heeft namelijk de punten dezer lemniscata, door eerst te werk te gaan als boven bij de constructie der gewone lemniscata, en alsdan uit de voetpunten der getrokkene loodlijnen wederom andere loodlijnen op de tegenovergestelde voerstralen der hyperbola van de tweede orde te laten vallen; de voetpunten dezer laatste loodlijnen zullen punten der lemniscata van de tweede orde zijn. Want uit de vergelijkingen der beide kromme lijnen (lemnisc. en hyperb.) heeft men deze eenvoudige betrekking tusschen derzelver voerstralen

$$\rho = r \cos.^2 2\varphi = (r . \cos. 2\varphi) . \cos. 2\varphi .$$

De eerste factor is de uitdrukking der projectie van den voerstraal r op den overeenkomstigen voerstraal r aan de andere zijde van de as, en deze uitdrukking vermenigvuldigd met den tweeden factor, geeft de uitdrukking der genoemde projectie wederom geprojecteerd op den eersten voerstraal r, aan de eerste zijde der as van de hyperbola der tweede orde getrokken.

In de rectificatie-formule der gewone gelijkzijdige hyperbola beteekent de term $tang. \psi' \Delta (\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \psi')$ de lengte van het gedeelte der raaklijn van de hyperbola, gerekend van het punt der hyperbola, overeenkomende met de amplitudo ψ', tot het voetpunt der loodlijn, uit den oorsprong op deze tangens nedergelaten. In de rectificatie-formule (34) der hyperbola van de tweede orde, hier beschouwd wordende, heeft de term $cot. \psi . \Delta (\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \psi)$ wel niet volstrekt dezelfde beteekenis, maar de stelkundige uitdrukking voor

de

de lengte van het gelijksoortige deel eener raaklijn, wordt toch uit de bestanddeelen van dezen term gevonden; want de stelkundige waarde van dit deel is $= \frac{cot.\,\psi}{\Delta}$, en de vorm is dus de omgekeerde van dien des bovengenoemden terms der rectificatie-formule van de gelijkzijdige hyperbola.

Een verder voortgezet onderzoek zou waarschijnlijk andere punten van overeenkomst tusschen de beide hyperbolen en lemniscaten leeren kennen, en het onderzoek der eigenschappen van de lemniscata ten opzigte van hare gelijke bogen, sommen of verschillen van bogen, multiplicatie en divisie of partitie van bogen, zou stellig, even als voor de bernouilliaansche lemniscata, belangrijke uitkomsten geven. Ik bepaal mij evenwel alleenlijk tot de navolgende niet onbelangrijke beschouwing.

De amplitudo ψ moet gerekend worden van *nul* tot $\frac{1}{2}\pi$, indien de polaire abscis φ gerekend wordt van $\frac{1}{4}\pi$ tot 0. Maar bij het integreren tusschen grenzen kan men de orde der grenzen omkeeren, zoo men slechts de teekens der termen, die geintegreerd worden, verandert. Men kan derhalve voor de rectificatie-formulen der hyperbola en der lemniscata van de tweede orde, welke hier beschouwd worden, stellen (gemakshalve den parameter $p = 1$ nemende, en den modulus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ niet schrijvende)

$$s = \left\{\tfrac{1}{4}\mathrm{F}(\psi) - \mathrm{E}(\psi) - cot.\,\psi\,.\,\Delta(\psi)\right\},$$

$$\mathrm{s} = \mathrm{E}(\psi).$$

Men neme nu op de lemniscata twee bogen, gerekend van een' der toppen (b. v. van af den regtschen top), en hebbende φ_1 en φ_2 tot polaire abscissen, zoo is het verschil in lengte dezer bogen een enkele boog s_1, welks lengte gevonden wordt door de formule

$$\mathrm{s}_1 = \mathrm{E}(\psi_1) - \mathrm{E}(\psi_2),$$

zijnde $\psi_1 = 90° - 2\varphi_1$ en $\psi_2 = 90° - \varphi_2$. Voor een' boog s_1 der hyperbola, welks einden door dezelfde voerstralen, en dus ook door dezelfde polaire abscissen bepaald zijn, is tevens:

$$s_1 = \tfrac{1}{4}\{F(\psi_1)-F(\psi_2)\}-\{E(\psi_1)-E(\psi_2)\}-\{\Delta(\psi_1)cot.\psi_1-\Delta(\psi_2)cot.\psi_2\}.$$

Voor een' anderen boog s_2 der lemniscata, en voor den overeenkomstigen boog der hyperbola, beide bepaald tusschen twee voerstralen, welker polaire abscissen zijn φ'_1 φ'_2, zal men eveneens hebben

$$\mathrm{s}_2 = E(\psi'_1) - E(\psi'_2),$$

$$s_2 = \tfrac{1}{4}\{F(\psi'_1)-F(\psi'_2)\} - \{E(\psi'_1)-E(\psi'_2)\}$$
$$- \{\Delta(\psi'_1)\,cot.\,\psi'_1 - \Delta(\psi'_2)\,cot.\,\psi'_2\}\,.$$

Noemende nu σ het verschil der bogen s_1 en s_2 van de lemniscata, en σ' het verschil der bogen s_1 en s_2 van de hyperbola, zoo heeft men

$$\sigma = \{E(\psi_1)+E(\psi'_2)\} - \{E(\psi_2)+E(\psi'_1)\},$$

$$\sigma' = \tfrac{1}{4}\{F(\psi_1)+F(\psi'_2)\} - \tfrac{1}{4}\{F(\psi_2)+F(\psi'_1)\} - \{E(\psi_1)+E(\psi'_2)\}$$
$$+ \{E(\psi_2)+E(\psi'_1)\} - \{\Delta(\psi_1)\,cot.\,\psi_1 + \Delta(\psi'_2)\,cot.\,\psi'_2\}$$
$$+ \{\Delta(\psi_2)\,cot.\,\psi_2 + \Delta(\psi'_1)\,cot.\,\psi'_1\}\,.$$

Maar indien men stelt (de modulus steeds $= \frac{1}{2}\sqrt{3}$ zijnde)

$$cos.\,\mu_1 = cos.\,\psi_1\,cos.\,\psi'_2 - sin.\,\psi_1\,sin.\,\psi'_2\,.\,\Delta(\mu_1),$$

$$cos.\,\mu_2 = cos.\,\psi_2\,cos.\,\psi'_1 - sin.\,\psi_2\,sin.\,\psi'_1\,.\,\Delta(\mu_2),$$

zal men, volgens de theorie der elliptische functieën, hebben

$$F(\psi_1)+F(\psi'_2)=F(\mu_1)\ ;\ E(\psi_1)+E(\psi'_2)=E(\mu_1)+\tfrac{3}{4}sin.\mu_1\,sin.\psi_1\,sin.\psi'_2\,,$$

$$F(\psi_2)+F(\psi'_1)=F(\mu_2)\ ;\ E(\psi_2)+E(\psi'_1)=E(\mu_2)+\tfrac{3}{4}sin.\mu_2\,sin.\psi_2\,sin.\psi'_1\,.$$

Ergo

$$\sigma = E(\mu_1)-E(\mu_2)+\tfrac{3}{4}\{sin.\mu_1\,sin.\psi_1\,sin.\psi'_2 - sin.\mu_2\,sin.\psi_2\,sin.\psi'_1\}\,,$$

$$\sigma' = \tfrac{1}{4}\{F(\mu_1)-F(\mu_2)\} - \sigma - \{\Delta(\psi_1)\,cot.\psi_1 + \Delta(\psi'_2)\,cot.\psi'_2\}$$
$$+ \{\Delta(\psi_2)\,cot.\psi_2 + \Delta(\psi'_1)\,cot.\psi'_1\}\,.$$

Nu kan men de amplitudines ψ_1 en ψ'_2 zoodanig nemen, dat de functieën $F(\psi_1)$ en $F(\psi'_2)$ complementair zijn. Alsdan is $F(\mu_1) = F'(\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $\mu_1 = \frac{1}{2}\pi$. Met de beide andere bogen ψ_2 en ψ'_1 kan dit eveneens geschieden. Ergo $F(\mu_1) = F(\mu_2)$ en $E(\mu_1) = E(\mu_2)$, en er komt derhalve

$\sigma =$

$$\sigma = \tfrac{3}{4}\,\{sin.\psi_1\, sin.\psi'_2 - sin.\psi_2\, sin.\psi'_1\}\,,$$

$$\sigma' = \{\Delta(\psi'_1)cot.\psi'_1 + \Delta(\psi_2)cot.\psi_2\} - \{\Delta(\psi_1)cot.\psi_1 + \Delta(\psi'_2)cot.\psi'_2\} - \sigma.$$

Men heeft alsdan ook, vermits het complement b van den modulus c gelijk is aan $\sqrt{(1-\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}$,

$$\tfrac{1}{2}\, tang.\psi_1\; tang.\psi'_2 = 1 \quad ; \quad \tfrac{1}{2}\, tang.\psi_2\, .\, tang.\psi'_1 = 1\,;$$

$$sin.\psi'_2 = \frac{cos.\,\psi_1}{\Delta(\psi_1)}\,;\, sin.\psi'_1 = \frac{cos.\,\psi_2}{\Delta(\psi_2)}\,;\, \Delta(\psi'_2) = \frac{1}{2\Delta(\psi_1)}\,;\, \Delta(\psi'_1) = \frac{1}{2\,\Delta(\psi_2)}\,.$$

Derhalve

$$\sigma = \tfrac{3}{4}\left\{\frac{sin.\,2\,\psi_1}{2\Delta(\psi_1)} - \frac{sin.\,2\,\psi_2}{2\Delta(\psi_2)}\right\},$$

$$\sigma' = \left\{\Delta\,(\psi_2)\,cot.\,\psi_2 + \tfrac{1}{2}\,tang.\,\psi_2\,.\,\frac{1}{2\,\Delta\,(\psi_2)}\right\}$$

$$- \left\{\Delta\,(\psi_1)\,cot.\,\psi_1 + \tfrac{1}{2}\,tang.\,\psi_1\,.\,\frac{1}{2\,\Delta\,(\psi_1)}\right\} - \sigma$$

$$= \left\{\Delta\,(\psi_2)\,cot.\,\psi_2 + \frac{1}{4\,\Delta\,(\psi_2)\,cot.\,\psi_2}\right\}$$

$$- \left\{\Delta\,(\psi_1)\,cot.\,\psi_1 + \frac{1}{4\,\Delta\,(\psi_1)\,cot.\,\psi_1}\right\} - \sigma\,.$$

Men besluit diensvolgens dat, zoo men op de lemniscata twee bogen neemt, in voege dat de complementen der dubbelde polaire abscissen $(90° - 2\varphi)$ van elk paar *niet* overeenstemmende uiteinden (ψ_1, en ψ'_2; ψ'_1 en ψ_2), de amplitudines zijn van twee complementaire elliptische functieën der eerste soort, hebbende $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ tot modulus, alsdan het verschil, zoowel van deze bogen als van de overeenkomstige eveneens bepaalde bogen der hyperbolische kromme, eene stelkundige uitdrukking tot waarde zal hebben, of, anders gezegd, rectifiabel zal wezen. De eene boog op de lemniscata, heb-

hebbende φ_1 en φ_2 tot polaire abscissen van uiteinden, kan naar welgevallen genomen worden, en de abscissen der uiteinden van den anderen boog worden alsdan, met behulp der vorenstaande betrekkingen, gevonden.

Men kan ook zeggen: zoo op de lemniscata twee bogen genomen worden, welker verschil is rectifiabel en tevens bepaald door de stelkundige uitdrukking der bovenstaande waarde van σ, dan zal het verschil der overeenkomstige hyperbolische bogen mede rectifiabel zijn en bepaald door de uitdrukking der waarde van σ'.

Deze eigenschap heeft overeenkomst met eene eigenschap der gewone lemniscata, door CHASLES opgemerkt, en blootelijk vermeld in een der bladen van de *comptes rendus* over den jare 1845, namelijk: zoo op eene bernouilliaansche lemniscata twee bogen genomen worden, welke even groot zijn, of, welker verschil $=0$ is, zal het verschil der overeenkomstige bogen van de overeenstemmende gelijkzijdige hyperbola rectifiabel zijn; deze eigenschap is derhalve, als het ware, een bijzonder geval van de bewezene.

In plaats van het verschil, zou men ook de som van twee bogen kunnen beschouwen; doch ik wil thans niet langer bij dit punt verwijlen.

C. Het laatste geval van voorgestelde herleiding is dat van $a^2=0$ of $b^2=0$, bij voorbeeld $b^2=0$, en $\beta^2=-\alpha^2$ (*), dat is, in de oorspronkelijke vergelijking (1), $\beta^6=-\alpha^6$. Deze vergelijking wordt daardoor

a^4

(2) Indien $\beta^2=+\alpha^2$, of wel $\beta^6=+\alpha^6$ is, ontstaat de vergelijking

$$x^4=p^2(x^2+y^2).$$

De kromme lijn, tot welke deze vergelijking betrekking heeft, is daarom in de algemeene beschouwingen in den tekst niet overwogen, wijl haar vorm niet lemniscatisch, en hare rectificatie eindig is. Het is eene kromme lijn, hebbende twee takken met parabolische asymptoten, verbonden door eene as, welker lengte is $2p$. Hare poolvergelijking is:

$$a^4\, x^4 = \alpha^6\,(x^2 - y^2)\,,$$

of, als boven $\dfrac{\alpha^6}{a^4} = p^2$ stellende,

$$x^4 = p^2\,(x^2 - y^2)\ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (37)$$

waarmede, door de vergelijking (4), overeenstemt,

$$r^2 = p^2 \cdot \frac{cos.\,2\,\varphi}{cos.^4\,\varphi} = 4\,p^2\,\frac{cos.\,2\,\varphi}{(1 + cos.\,2\,\varphi)^2}\ \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (38)$$

De

$$r = \pm\,\frac{p}{cos.^2\,\varphi}\,,$$

en deze, zoowel als de vergelijking op orthogonale coördinaten, kunnen geacht worden begrepen te zijn in de vergelijkingen (10) en (11), sub A overwogen. Ingevolge de poolvergelijking heeft men deze zeer eenvoudige constructie der kromme lijn. Trek, door het einde der halve as p eene onbepaalde loodlijn; verder, boven en onder de as, twee onbepaalde voerstralen, makende gelijke hoeken φ met de as; breng het gedeelte van een dezer voerstralen, begrepen tusschen den oorsprong en de zoo even genoemde loodlijn, met een cirkelboog op de as over, en trek, door het uiteinde dezer overgebragte lengte, wederom eene loodlijn door de as; de punten, in welke zij de beide voerstralen snijdt, zullen punten van de kromme lijn wezen, welke men vervolgens op de negatieve rigtingen der voerstralen kan overbrengen, om de overeenstemmende punten van den anderen tak der kromme te verkrijgen.

De inhoud van eenigen polairen sector volgt niet dadelijk uit de vergelijking (8), maar door den gewonen regel op de poolvergelijking toe te passen, zal worden verkregen:

$$I = \tfrac{1}{2}\,p^2\,(tang.\,\varphi + \tfrac{1}{3}\,tang.^3\,\varphi)\,,$$

en dus, b. v. voor $\varphi = 45°$, $I = \frac{2}{3}p^2$, waarmede zal overeenstemmen voor den inhoud van het halve hyperbolisch segment, hebbende $(r\,cos.\,\varphi - p)$ tot pijl, $I' = \frac{1}{3}p^2$.

Voor de rectificatie vindt men, hetzij met formule (9), hetzij regtstreeks uit de poolvergelijking,

$$\partial s = p\,.\,\partial\,tang.\,\varphi\,.\ \sqrt{(1 + 4\,tang.^2\,\varphi)}\,,$$

$$s = \tfrac{1}{2}\,p\,\left\{tang.\,\varphi\,\sqrt{(1 + 4\,tang.^2\,\varphi)} + \tfrac{1}{2}\,Log.\left[2\,tang.\,\varphi + \sqrt{(1 + tang.^2\,\varphi)}\right]\right\}\,.$$

Eenvoudiger is de uitdrukking, wanneer men, hetzij in deze, hetzij in de voorgaande, $2\ tang.\,\varphi = tang.\,\psi$ stelt; men heeft alsdan:

$$s = \tfrac{1}{2}\,p\,\left\{tang.\,\psi\ sec.\,\psi + Log.\,tang.\,(45° + \tfrac{1}{2}\,\psi)\right\}\,.$$

De vergelijking (37) is een bijzondere vorm van de vergelijking (14), en, even als deze, heeft zij betrekking tot eene lemniscatische kromme lijn, van welke — omdat y^2, in de nabijheid van den knoop, hoogstens $= x^2$ kan zijn, of ook, op oneindig kleinen afstand van den knoop, werkelijk $y^2 = x^2$ zal wezen — de tangenten, die door den knoop gaan, een' halven regten hoek met de as $2p$ zullen maken, zoo als dit bij de lemniscata van Bernouilli plaats heeft.

Men heeft deze lemniscata lang gekend, doch ik vind er niets meer van aangeteekend dan eene constructie en de quadratuur. Wel staat mij voor, ergens gelezen te hebben, dat FAGNANO zich met hare beschouwing zou onledig gehouden hebben, doch het voorname geschrift van FAGNANO, *Produzzioni mathematiche* (1750), is mij nimmer onder de oogen geweest. Dat ook FAGNANO de rectificatie in genoegzame volledigheid zou behandeld hebben, komt mij zelfs zeer twijfelachtig voor. Ook EULER, die in de *Novi Comment. petropolit.*, tomo VI, over de lemniscata van Bernouilli (zoo verre hare rectificatie aangaat) geschreven heeft, en meermalen op den arbeid van FAGNANO verwijst, gewaagt van de hier bedoelde lemniscata niet.

CRAMER bedient zich van deze lemniscata in zijn werk: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (page 495), bij de verklaring van het gebruik der kromme lijnen in de methode der maxima en minima, en wel in het voorbeeld, om de halve hoogte te vinden van den grootsten regthoek, die in een gegeven cirkel kan beschreven worden. Want den straal van dezen cirkel p noemende, en den inhoud des regthoeks $4py$, zoo komt men tot eene aequatie, welke den vorm (37) kan aannemen.

Wat de constructie aanbelangt, men kent deze zeer eenvoudige: Trek in den cirkel, welks straal is p, eene middellijn als *as* der lemniscata; door dezelve eene loodregte koorde; verder een' straal, gaande door een der uiteinden van deze koorde; daarna uit het snijpunt der koorde met de as eene loodlijn op dezen straal getrokken, en de lengte dezer loodlijn, met

een'

een' cirkelboog, op de positieve en negatieve rigtingen der koorde, overgebragt hebbende, zoo verkrijgt men twee punten der lemniscata (*).

De inhoud der kromme lijn kan niet door de formule (8) gevonden wor-

(*) Ook kan men deze eenvoudige constructie uit de vergelijking (37) afleiden. Beschrijf op de halve as p een' halven cirkel. Trek uit een der einden van de middellijn p eene willekeurige koorde, en uit het andere einde dezer koorde eene loodlijn op de middellijn p, zoo men dan die koorde aanneemt te zijn de abscis x, zal deze loodlijn de ordinaat y wezen.

De lemniscata van Bernouilli kan op onderscheidene wijzen geconstrueerd worden. Het is niet moeijelijk om andere constructieën aan te wijzen, dan de gewone en bekende. Ik acht zulks van minder belang; doch kan niet nalaten te doen opmerken, dat de zoo pas opgegevene constructie mede op de lemniscata van Bernouilli toepasselijk is, en wel omdat de vergelijking dezer laatste tot den vorm der vergelijking (37) kan gebragt worden, door een ander stelsel van coördinaten te bezigen. Neemt men namelijk de scheefhoekige coördinaten onder de as $2p$ en eene der tangenten, gaande door den knoop, zoo heeft men assen, die elkander onder een' hoek van 45° snijden, en wanneer men de coördinaten ten opzigte van deze assen noemt ξ en η, zoo herleidt men de vergelijking der lemniscata van Bernouilli, welke voor de regthoekige assen is

$$(x^2+y^2)^2 = r^4 = p^2\ (x^2-y^2)\ ,$$

tot deze andere,

$$r^4 = p^2\,(\xi^2 + \xi\eta\,\sqrt{2})\ ;$$

en deze is wederom

$$r^4 = p^2\,(\xi^2+\xi\eta\,\sqrt{2} + \eta^2-\eta^2) = p^2\,(r^2-\eta^2)\ .$$

Deze aequatie drukt alsoo een zelfde verband uit tusschen r en η, hoedanig de vergelijking (37) tusschen x en y. Ergo kunnen, bij aanwending van het genoemd scheefhoekig stelsel, r en η geconstrueerd worden, zoo als boven, ten aanzien der coördinaten x en y van de andere lemniscata is voorgeschreven.

In weerwil van het nu aangewezen verband tusschen de vergelijkingen der onderwerpelijke lemniscata en die van Bernouilli, is de eerste toch geen vorm van de laatste. Want de vergelijking dezer laatste kan nimmer overgaan in de vergelijking (37), vermits de coëfficient, welke steeds genoemd is b^2, de bepaalde waarde van *één* voor de lemniscata van Bernouilli moet hebben, en dus nimmer gelijk *nul* kan aangenomen worden. De onderwerpelijke lemniscata is eerder een vorm eener andere, uit de snijding van een' bol en kegel ontstaande, zoo als in § II dezer bijdrage zal aangetoond worden.

worden, wijl deze, voor het geval van $b^2 = 0$, eerst nog eene wijziging of eenvoudige herleiding zou moeten ondergaan, daarin bestaande, dat men, alvorens $b^2 = 0$ te stellen, voor $\frac{\beta^2}{b}$ schrijve q, daarna $q = p$, en alsdan $b = 0$ in die termen, welke b nog inhouden. Hierdoor vindt men voor den inhoud der geheele lemniscatische ruimte $\frac{4}{3}p^2$, en dus $\frac{1}{3}$ grooter dan de ruimte, ingesloten door de lemniscata van Bernouilli, zoo deze dezelfde lengte van as heeft; en deze uitkomst was vroeger reeds bekend.

Door de rectificatie-formule (9) verkrijgt men:

$$\partial s = \frac{2p\,\partial\varphi}{(1+\cos.2\varphi)^2}\sqrt{\left\{\frac{\cos.^2 2\varphi\,(1+\cos.2\varphi)^2 + \sin.^2 2\varphi\,(1-\cos.2\varphi)^2}{\cos.2\varphi}\right\}}$$

$$= \frac{2p\,\partial\varphi}{1+\cos.2\varphi}\sqrt{\left\{\frac{\cos.^2 2\varphi + \sin.^2 2\varphi\,tang.^4\varphi}{\cos.2\varphi}\right\}}$$

$$= \frac{p\,\partial\varphi}{\cos.^2\varphi}\sqrt{\left\{\frac{1-3\,tang.^2\varphi + 4\,tang.^4\varphi}{1-tang.^2\varphi}\right\}}.$$

Om deze formule tot elliptische integralen te brengen, stelle men $tang.\varphi = \sin.\psi$, waardoor zij zal overgaan in

$$\partial s = \frac{p\,\partial\psi\,\{1-3\sin.^2\psi + 4\sin.^4\psi\}}{\sqrt{\{1-3\sin.^2\psi + 4\sin.^4\psi\}}}$$

$$= \frac{p.\partial.tang.\psi}{(1+tang.^2\psi)^2}\cdot\frac{1-tang.^2\psi + 2\,tang.^4\psi}{\sqrt{\{1-tang.^2\psi + 2\,tang.^4\psi\}}}.$$

Hierin nu wederom $2\,tang.^4\psi = tang.^4\frac{1}{2}\omega$, zoo komt men tot

$$\partial s = \frac{\frac{1}{4}p\sqrt{8}\,.\,\partial\omega}{\{1-(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})\sin.^2\frac{1}{2}\omega\}^2}\cdot\frac{1-\frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\sqrt{2})\sin.^2\omega}{\sqrt{\{1-\frac{1}{4}(2+\frac{1}{2}\sqrt{2})\sin.^2\omega\}}}.$$

Substituerende $\sin.^2\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}.(1-\cos.\omega)$, vermenigvuldigende teller en noemer van het gebroken met $\{(1+\frac{1}{2}\sqrt{2})-(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})\cos.\omega\}^2$, en herleidende daarna behoorlijk, zoo ontstaat eindelijk:

∂s

$$\partial s = \tfrac{1}{8} p \sqrt[4]{8} \,.\, \frac{\partial\omega \left\{3 - \cos.\omega - m \,.\, \sin.^2\omega\right\} \left\{1 - c^2 \sin.^2\omega\right\}}{(1 + n \sin.^2\omega)^2 \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\omega)}} \,,$$

in welke, tot meerdere eenvoudigheid, gesteld is,

$$\tfrac{3}{2} - \sqrt{2} = m \,,$$
$$\tfrac{3}{8}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2} = n \,,$$
$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\sqrt{2} = c^2 \,.$$

De verdere behandeling dezer formule, volgens regels, daartoe uit de theorie der elliptische functieën bekend, hangt van eene zeer wijdloopige berekening af, van welke het genoeg moge zijn, hier de niet zeer eenvoudige uitkomst te vermelden, te weten:

$$s = (\tfrac{1}{8} p \sqrt[4]{8}) \left\{ \left[\frac{mc^2}{n^2} - \frac{(3n + m)(n + c^2)}{2n^2 (1+n)}\right] \mathrm{F} + \frac{3n+m}{2n(1+n)} \mathrm{E} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{(3n+m) \left\{n(2+n) + (3+2n) c^2\right\}}{2n^2 (1+n)} - \frac{m + 3c^2}{n} - \frac{2mc^2}{n^2}\right] . \Pi \right\} +$$
$$+ (\tfrac{1}{8} p \sqrt[4]{8}) \left\{ \frac{3n+m}{2(1+n)} \,.\, \frac{\sin.\omega.\cos.\omega \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\omega)}}{1 + n \sin.^2\omega} - \tfrac{1}{2} \,.\, \frac{\sin.\omega \sqrt{(1 - c^2 \sin.\omega)}}{1 + n.\sin.^2\omega} \right.$$
$$+ \frac{n + 2c^2}{4n\sqrt{(n+c^2)}} \,.\, \text{Boog tang.} \left[= \frac{1 - (n + 2c^2 \sin.^2\omega)}{2(n + c^2)^{\frac{1}{2}} . \sin.\omega \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\omega)}}\right]$$
$$\left. + \frac{c^2}{n\sqrt{(n + c^2)}} \text{ Boog tang.} \left[= \frac{\sin.\omega \sqrt{(n + c^2)}}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\omega)}}\right] \right\} \;\ldots\ldots\; (39)$$

Daar $tang.\varphi = sin.\psi$, en $tang.\psi = (\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}})\, tang.\tfrac{1}{2}\omega$ is, zoo wordt

$$tang.\varphi = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}\omega}{\sqrt{\left\{1 - (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}) \sin.^2\tfrac{1}{2}\omega\right\}}} \,.\, \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}} \,.$$

De grenzen van φ zijn 45° en *nul;* derhalve moeten, met $\varphi = 0$ en $\varphi = 45°$, overeenstemmen $\omega = 0$ en $\omega = 180°$. Hieruit vloeit voort, dat, om de lengte van een der lemniscatische quadranten te bepalen, de formule (39) moet worden genomen tusschen de grenzen 180° en 0°. Ten

aan-

aanzien van de termen, die met eenige elliptische functie worden gemultipliceerd, komt dit neder op het verdubbelen van dezelve, en op het vermenigvuldigen met de complete functieën. En wat betreft de volkomen geintegreerde termen, deze hebben, voor beide de grenzen, dezelfde waardijen, en vervallen alzoo uit de integraal. Ergo zal de formule voor de lengte van het lemniscatisch quadrant den vorm hebben van:

$$S = (\tfrac{1}{4} p \sqrt{8}) \{A . F'(c) + B . E'(c) + C . \Pi'(n, c)\} \quad . \; . \; . \; . \quad (40)$$

De parameter n is hier kleiner dan één, maar positief; denzelven $=$ $cot.^2 \theta$ stellende, zoo wordt de complete functie Π afhankelijk gemaakt van E en F, door middel van de formule

$$\Pi'(n,c) = \frac{sin.\theta.cos.\theta}{\Delta(b,\theta)} \left\{ \tfrac{1}{2}\pi + tang.\theta.\Delta(b,\theta)F'(c) + [F'(c) - E'(c)]F(b,\theta) - F'(c)E(b,\theta) \right\}$$

(zie LEGENDRE, *Traité* etc. I, pag. 134), in welke $b = \sqrt{(1 - c^2)}$ is. De substitutie hiervan en de verdere ontwikkeling worden nagelaten, aangezien de coëfficienten van F en E, zelfs bij overbrenging der volstrekte getallenwaarden van n, m, c, b, zeer zamengestelde uitdrukkingen worden. De vorm der einduitkomst verschilt evenwel zeer weinig van dien der formule (23).

Stelde men, even als SERRET voor de gewone lemniscata deed, meer algemeen:

$$r^m = (2p)^m \frac{cos.\, m\varphi}{(1 + cos.\, m\varphi)^m} \;,$$

dan zou men, voor het geval van $m = 1$, verkrijgen

$$r = (2p - r)\, cos.\, \varphi \;.$$

Bij de gewone lemniscata zou deze vergelijking zijn $r = p\, cos.\, \varphi$, en behooren tot een' cirkel, hebbende p tot middellijn. Hier is de verkregene vergelijking striktelijk wel die eener lijn van den vierden graad, maar zij heeft den vorm van de vergelijking eens cirkels, en er bestaat dus eenige over-

overeenkomst tusschen de bijzondere gevallen van $m = 1$, zoo voor de gestelde vergelijking, als voor die, welke uit de vergelijking der lemniscata van Bernouilli wordt afgeleid. Bij deze laatste heeft de cirkel eene standvastige middellijn; bij de eerste is de middellijn veranderlijk met den voerstraal. Men kan de kromme lijn dan ook gemakkelijk met den cirkel, die $2p$ tot straal heeft, en met een anderen, die, r willekeurig nemende, $2p - r$ tot middellijn heeft, construeren. Ook indien men eene parabola construeert, hebbende p tot brandpunts-afstand, en dat men op de voerstralen, uit het brandpunt getrokken, deelen neemt, die aan de projectieën dezer voerstralen op de as gelijk zijn, zullen de uiteinden dezer deelen punten van de kromme lijn wezen, hetgeen dadelijk blijkt uit de pool-aequatie

$$r = \frac{2p \cdot cos. \varphi}{1 + cos. \varphi} = \frac{2p}{1 + cos. \varphi} \cdot cos. \varphi .$$

Hoe eenvoudig ook de vergelijking dezer kromme lijn moge schijnen, zoo hangt hare rectificatie van eene zamenstelling van elliptische integralen af, veel meer ingewikkeld zijnde dan de formule, zoo even, in de onmiddelijk voorgaande beschouwing verkregen.

Neemt men $p = 1$, zoo heeft de hyperbolische lijn, welke de omgekeerde kromme der overwogene lemniscata is, tot pool-aequatie

$$\rho^2 = \tfrac{1}{4} \left\{ \frac{1}{cos. 2\varphi} + 2 + cos. 2\varphi \right\};$$

ergo is het quadraat van haren voerstraal gelijk aan $\frac{1}{4}$ van de som der quadraten, beschreven op de overeenkomstige voerstralen eener gewone lemniscata en der overeenstemmende gelijkzijdige hyperbola, en op de koorde van het quadrant eens cirkels, hebbende de halve as der lemniscata en der hyperbola tot straal; — indien de parameter niet $= 1$ ware, zou hetzelfde klaarblijkelijk nog plaats vinden ten aanzien van het p-voud des voerstraals. Dit is het eenige belangrijke, dat van de hyperbolische lijn, die als grondlijn van de beschouwde lemniscata kan aangemerkt worden, vermelding ver-

verdient. Een verder voortgezet onderzoek, voornamelijk met oogmerk om uit te vorschen, of er merkwaardige betrekking tusschen overeenstemmende bogen dezer kromme lijnen bestaat, heeft niets bijzonders opgeleverd.

D. De behandelde gevallen zijn de voornaamste, in welke, door bijzondere betrekkingen tusschen de coëfficienten $a^2, b^2, \alpha^6, \beta^6$, het onderzoek der rectificatie tot eenige wetenswaardige uitkomst voert. Men kan evenwel nog andere betrekkingen tusschen die coëfficienten stellen, door welke de vergelijking (1), (3) of (4) tot lemniscaten behoort, welker wording opmerking verdient. Neemt men b. v. aan, dat, in de vergelijkingen (3) of (4), de coëfficienten van $sin.^2 \varphi$ of $cos. 2\varphi$ gelijk zijn, dat is: stelt men $(\alpha^6 - \beta^6) = (a^2 - b^2)$, of $\alpha^6, \beta^6, a^2, b^2$ in rekenkundige evenredigheid, zoo behoort de vergelijking tot eene lemniscata, welke is de orthogonale projectie der sphaerische lemniscata. Even zoo als de gewone lemniscata de eigenschap heeft, dat het product der overeenkomstige voerstralen, uit de beide brandpunten getrokken, gelijk is aan de tweede magt der excentriciteit, kan men zich ook voorstellen op de sphaer twee punten en de lemniscatische lijn, welke de eigenschap heeft, dat het product der *sinussen* of der *tangenten* van de geheele of der halve sphaerische voerstralen, uit genoemde punten tot eenig punt der kromme getrokken, standvastig gelijk zij aan de tweede magt der *sinus* of *tangens* van den halven sphaerischen afstand of van het $\frac{1}{4}$ des afstands dier punten. Nemende de *sinussen* der halve sphaerische voerstralen, noemende vervolgens den sphaerischen afstand der beide punten 2ε, den sphaerischen centralen voerstraal ρ, en φ den sphaerischen hoek, begrepen tusschen den voerstraal ρ en de sphaerische lijn, welke door pasgenoemde sphaerische brandpunten gaat, zoo komt men, uit de sphaerische driehoeken, welke ρ, ε, en de brandpuntsvoerstralen tot zijden hebben, tot de betrekking

$$cos. \varepsilon = cos.^2 \tfrac{1}{2}\rho \, (1 - sin.^2 \varepsilon \, . \, sin.^2 \varphi),$$

of

cos.

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2}\rho = \frac{\cos.\varepsilon}{1 - \sin.^2\varepsilon . \sin.^2\varphi}\,.$$

Deze is de vergelijking der sphaerische lemniscata, door ROBERTS opgegeven in een artikel, voorkomende in Deel VIII, pag. 263, van het *Journal de mathématiques, par* LIOUVILLE, en uit welke vergelijking, door dezen wiskundige, de rectificatie der sphaerische lemniscata is opgemaakt. De lengte der bogen van deze niet vlakke kromme lijn hangt af van eene elliptische functie der eerste soort, hebbende een' modulus, van welken de hoek tusschen 0 en 45° kan veranderen, terwijl, bij de vlakke lemniscata, de modulus standvastig is (4).

De orthogonale projectie der sphaerische lemniscata op het vlak van een' grooten cirkel, loodregt staande op de middellijn, welke men door den knoop der sphaerische kromme lijn getrokken kan denken, is eene vlakke lemniscata, van welke de centrale poolvergelijking zeer gemakkelijk uit de bovengestelde aequatie wordt afgeleid. Want de hoek φ blijft in de projectie onveranderd; de projectie van den boog ρ wordt eene regte lijn r, zoodat $r = \sin.\rho$ is; eveneens wordt de projectie van den boog ε eene lijn c, die $= \sin.\varepsilon$ is, en hiermede wordt de vergelijking der projectie van de sphaerische lemniscata

$$r^2 = \frac{4\sqrt{(1-c^2)}}{1 - c^2\sin.^2\varphi} - \frac{4(1-c^2)}{(1-c^2\sin.^2\varphi)^2}\,.$$

Stelt

(4) Voor het oogmerk des onderzoeks van ROBERTS is de vorm der vergelijking van de sphaerische lemniscata zeer geschikt. Wilde men den vorm meer overeenkomstig met dien der poolvergelijking van de vlakke lemniscata stellen, dan zou men, door b.v. $\cos.^2\frac{1}{2}\rho$ tot $\tang.^2\frac{1}{2}\rho$ te herleiden, hebben

$$\tang.^2\tfrac{1}{2}\rho = \frac{(1-\cos.\varepsilon)^2 + \sin.^2\varepsilon . \cos.2\varphi}{2\cos.\varepsilon}\,;$$

want bij den overgang van het sphaerisch vlak, tot het platte vlak gaat deze vergelijking ook over in de gewone poolvergelijking der lemniscata van BERNOULLI.

Stelt men $\sqrt{(1-c^2)} = q$, zoo kan men deze vergelijking schrijven onder den vorm

$$r^2 = 4q.\frac{(1-q)-c^2 sin.^2\varphi}{(1-c^2 sin.^2\varphi)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

overeenkomende met of begrepen in den algemeenen vorm (3) der poolvergelijking van de lemniscatische kromme lijnen der eerste orde.

Deze lemniscata kan nimmer eene bernouilliaansche worden, wijl de hoek, tusschen de as en de centrale tangenten, altijd boven 45° blijft, zijnde het maximum der waarde van dien hoek bepaald door de betrekking

$$sin.\varphi = \frac{\sqrt{(1-q)}}{c};$$

daar nu de straal van den bol $=1$ is, zal c steeds kleiner dan 1 moeten wezen (5), en voor elke waarde van c, tusschen 0 en 1, zal de waarde van $sin.^2\varphi$ altijd $> \frac{1}{2}$, en dus $\varphi > 45°$ worden; $c=0$ kan alleenlijk *sin.*

(5) Dit wordt hier kortheidshalve in het algemeen gezegd; doch de eigenlijke grootste grens voor de waarde van c is niet alleenlijk kleiner dan één, maar kleiner dan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Bij de beschouwing der projectie van de sphaerische lemniscata wordt namelijk voorondersteld, dat deze kromme lijn zich niet uitstrekke tot in de hemisphaer, beneden het projectie-vlak gelegen. Is $c^2=\frac{3}{4}$, en $q^2=\frac{1}{4}$ of $q=\frac{1}{2}$, dan is de grootste sphaerische voerstraal ρ juist $=$ een quadrant, en de projectie van dezen voerstraal moet dus aan den straal 1 des bols gelijk wezen; hetgeen ook blijkt uit de formule (41) als men $\varphi=0$ en $q=\frac{1}{2}$ stelt. Hoezeer dan, op den bol, $sin.\varepsilon$ alle waarden kan hebben van *nul* tot *één*, moet men, om geene projectie te verkrijgen, welke van de lemniscatische figuur afwijkt, de waarde van $c=sin.\varepsilon$ kleiner dan $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ stellen. Voor grootere waarden van q, boven $\frac{1}{2}$, zou het ook kunnen gebeuren, dat de formule (43) eene negatieve uitkomst voor den inhoud opleverde, hetgeen inderdaad zeer wel kan plaats vinden, als de sphaerische lemniscata tot in de onderste helft van het oppervlak des bols (en dus beneden het vlak van projectie) is uitgestrekt, en diensvolgens eene projectie heeft, bestaande uit deelen, welke aan beide zijden van het vlak van projectie zijn genomen; want de inhoud van het eene deel moet daardoor, ten opzigte van dien des anderen deels, als negatief aangemerkt worden bij het integreren.

$sin.^2\,\varphi = \frac{1}{2}$ opleveren. Nog duidelijker blijkt dit, indien men $tang.\,\varphi$ bepaalt uit $sin.\,\varphi$; want voor $tang.\,\varphi$ komt alsdan de waarde $\frac{1}{q}$, en q bestendiglijk < 1 zijnde, zal φ altijd $> 45°$ wezen.

Zij $r = \frac{r}{2\sqrt{q}}$, zoo komt uit (41), overeenkomstig den vorm der vergelijking (4), vroeger gesteld,

$$r^2 = 2 \, . \, \frac{(1-q)^2 + c^2 \cos. 2\,\varphi}{\{(1+q^2) + c^2 \cos. 2\,\varphi\}^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

Hiermede de toepassing makende op formule (8), verkrijgt men voor den inhoud der lemniscata

$$\mathrm{I} = \frac{(1-q)}{q} \, . \, \{4\sqrt{q} - (1-q)\,\pi\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Doch met de herleiding der rectificatie-formule (9) schijnt geen gewenscht resultaat verkregen te kunnen worden, welke bepaalde getallenbetrekkingen men ook voor c^2, of voor q, mogt aannemen.

Het voorgaande betreft inzonderheid de lemniscaten van de eerste orde. Het onderzoek zou tot lemniscaten van hoogere orde kunnen uitgestrekt worden; dan ik eindig hier deze beschouwingen met alleenlijk nog te vermelden, dat men, behalve lemniscaten van verschillende orde, maar hebbende algebraïsche of zuiver goniometrische aequatieën, ook nog onderscheiden kan lemniscaten, die eene transcendentale vergelijking hebben. Zoo b. v. φ is eene cirkelvormige abscis, z eene polaire of divergerende ordinaat, loodregt door de cirkelvormige abscis gerigt, en α de grootste waarde van φ, voor welke z eene bestaanbare waarde kan erlangen, zal de kromme lijn, welker vergelijking is

$$z^2 = \alpha^2\,(\alpha^2 - \varphi^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

(eigenlijk tot de klasse van elliptische spiralen behoorende), geacht kunnen

 wor-

worden te zijn eene transcendentale lemniscata. Haar vorm is zuiver lemniscatisch, en hare rectificatie wordt gemakkelijk van eene elliptische integraal afhankelijk gemaakt. EULER maakt van den vorm dezer kromme lijn ter loops gewag in zijne *Introductio in analysin infinitorum*, Vol. II, Cap. XXI, pag. 302.

---

§ II.

Na deze beschouwingen, tot welke de vergelijking (3) of (4) aanleiding gaf, moet nu gehandeld worden over andere wijzen van wording der lemniscaten, onderscheiden van de vroeger aangeduide, gelijk mede eenige voorbeelden moeten worden bijgebragt van bepaalde gevallen, in welke lemniscatische kromme lijnen kunnen ontstaan; alleenlijk zal het hoofdzakelijke hieromtrent worden aangestipt.

a. Indien de generatie van lemniscaten, als omgekeerde van hyperbolische kromme lijnen, boven is voorgesteld als eene algemeene wording, zoo is zij nogtans de eenige niet; want zonder dezelve als omgekeerde kromme lijnen aan te merken, kunnen zij ook nog op onderscheidene andere wijzen uit gegevene kromme lijnen geboren worden. Reeds is van eene andere constructie van lemniscaten uit hyperbolen gewaagd, want de voetpunten der loodlijnen, uit het centrum eener hyperbolische kromme op hare opvolgende raaklijnen nedergelaten, moeten noodwendig in een' lemniscatischen omtrek zijn gelegen. De lemniscaten zijn dus niet alleenlijk omgekeerde van hyperbolische kromme lijnen, maar ook zoogenaamde voetpunten-kromme lijnen der hyperbolen van verschillende orden. En niet slechts uit opene kromme lijnen, gelijk de hyperbolen zijn, ook uit geslote-

tene kromme lijnen, zoo als uit ellipsen, cirkels, ovalen, enz. kunnen de lemniscaten op meer dan ééne wijze voortkomen. Eindelijk, daar elke kromme lijn kan gedacht worden te zijn de meetkundige plaats der doorsnijdings-punten van andere lijnen (hetzij regte, hetzij kromme, hetzij regte en kromme lijnen), aan eene bepaalde wet van beweging of verandering onderworpen, zoo kan ook een dergelijke oorsprong aan de lemniscaten toegekend worden.

Men denke b.v. eene ellips. Eene middellijn getrokken, en ergens op het verlengde dezer middellijn een punt O genomen hebbende, zoo trekke men, door dit punt, een bundel van stralen, genoegzaam verlengd om door den omtrek der ellips gesneden te worden. Op elken straal bestaat aldus eene koorde der ellips; men brenge nu, te rekenen van het punt O, en aan weerzijden van hetzelve, op elken straal de lengte der overeenkomstige koorde over, zoo maken de uiteinden dezer stralen van bepaalde lengte eene meetkundige plaats uit, en deze is eene lemniscata, van welke het punt O de knoop is. Zij is wel symmetrisch, maar niet ten opzigte van de bovengenoemde middellijn, zoo deze is eene willekeurige, en niet de grootste of de kleinste middellijn. Het is zeer gemakkelijk, de vergelijking dezer lemniscata op te maken. Is b.v. de gekozene middellijn de groote as der ellips, zoo is haar verlengde de as der lemniscata. Nemende nu het punt O als oorsprong van regthoekige coördinaten, stellende wijders de halve assen der ellips a en b, en d den afstand der middelpunten van de ellips en der lemniscata, zoo vindt men voor de middelpunts-vergelijking der lemniscata

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = 4\,a^2\,b^2\,\{(b^2x^2 + a^2y^2) - d^2y^2\} \quad . \; . \; . \; (45)$$

welke, vermits $d > a$, en dus $(a^2 - d^2)\,y^2$ eigenlijk is $-\,(d^2 - a^2)\,y^2$, ook behoort tot de vergelijkingen, begrepen in de algemeene vroeger gestelde vergelijkingen (1) en (2).

Voor een cirkel is $b = a$, en dus

$$(x^2 + y^2)^2 = 4\,\{a^2\,(x^2 + y^2) - d^2\,y^2\}\,,$$

 en

en deze gaat over in de vergelijking der lemniscata van BERNOUILLI, wanneer $d^2 = 2a^2$ wordt, en in de daad maken alsdan — doch ook in geen ander geval — de raaklijnen, uit O tot den cirkel getrokken, een' regten hoek met elkander.

Dezelfde constructie op andere geslotene kromme lijnen herhalende, komen er insgelijks lemniscaten, die echter van hoogere orde zullen wezen, en enkel of dubbel kunnen zijn. Neemt men b. v. op de dwarsche as eener gewone lemniscata, of van elke andere lemniscata der eerste orde, een punt, en herhaalt men de opgegevene constructie op beide de strikken der lemniscata, zoo ontstaat er eene dubbele lemniscata van de derde orde, dat is eene lemniscata, hebbende *vier* symmetrisch gelegen strikken, en eene orthogonale coördinaten-vergelijking van den achtsten graad.

De verklaarde wording is geenszins nieuw. Voor den cirkel is de wording der lemniscata van BERNOUILLI opgegeven door CHASLES in een der deelen van de *comptes rendus de l'Académie des sciences* van het fransche Instituut (zie ook het *Journal de mathématiques, publié* par LIOUVILLE, Tome X, page 451). Doch het meer algemeene voorstel, om de constructie op eene ellips toe te passen, treft men aan in een, zoo ik vermeen reeds vroeger uitgegeven, nederduitsch geschrift. Ik heb namelijk de verklaarde wording der lemniscaten ontleend van eene beschouwing, en uit een voorgesteld en opgelost problema, voorkomende in het 2e stuk des eersten deels (pag. 44) der *Nieuwe wis- en natuurkundige verhandelingen of voorstellen* van het amsterdamsch genootschap, onder de zinspreuk: *een onvermoeide arbeid komt alles te boven*. Aldaar wordt evenwel minder acht gegeven op die kromme lijnen als lemniscaten, en hetgeen van hare rectificatie wordt gezegd, als wel tot ingewikkelde berekeningen voerende, maar tot geene merkwaardige uitkomsten, is, naar aanleiding der voorgaande beschouwingen, verre af van zoo beslissend te zijn.

---

b. Om de bijzondere soorten van lemniscaten der eerste orde te kunnen construeren, indien men dezelve als omgekeerde kromme lijnen beschouwt, moet men de bijzondere soorten van hyperbolen kennen, uit welke zij, door omkeering van de getallen-waarden der voerstralen, ontstaan. Doch men kan ook eene geheel eigenaardige wording aan de lemniscaten toeschrijven, door ze aan te merken als kromme lijnen, welker punten verkregen worden bij de snijding van gewone hyperbolen met ellipsen, of ook met cirkels, welker parameters, voor elke nieuwe groep van punten, op eene regelmatige wijze veranderen, en wel met tusschenkomst eener parabola; zoodat, op deze wijze, de lemniscaten uit de gewone kegelsneden haren oorsprong ontleenen.

Men schrijve de vroeger beschouwde algemeene vergelijking (2) der lemniscaten van de eerste orde onder dezen vorm:

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2 = c^4\,(\beta^2x^2 - \alpha^2y^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\zeta)$$

alsdan moet aangetoond worden, dat deze vergelijking kan ontstaan uit de eliminatie der veranderlijke parameters, voorkomende in de vergelijkingen van eene hyperbola en eener ellips, welke elkander snijden, en telkens van afmeting veranderen. De wet van verandering dezer afmetingen zou verschillend kunnen wezen, doch om de mogelijkheid of het eigenaardige dezer niet onbelangrijke wording der lemniscaten aan te toonen, strekke alleenlijk het navolgende.

Men denke eene hyperbola, hebbende eene halve eerste as $= p$, terwijl de betrekking of verhouding tusschen de tweede en eerste as zij $= (\beta : \alpha)$. De vergelijking van deze hyperbola zal zijn

$$\beta^2x^2{}_1 - \alpha^2y^2{}_1 = p^2\beta^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varkappa)$$

Indien men, in deze vergelijking, p willekeurig laat veranderen, zal zij de vergelijkingen opleveren van alle gelijkvormige hyperbolen, welker asymp-

asymptoten met de eerste assen denzelfden hoek insluiten, wiens goniometrische tangens is $\doteq \frac{\beta}{\alpha}$.

Zij ook eene ellips, hebbende eene halve grootste en halve kleinste middellijn, welker verhouding is $\frac{a}{b}$. En nog denke men eene parabola, hebbende een parameter $= \beta \cdot \frac{c^2}{ab}$, zijnde c eenige gegevene lijn. Is nu p eenige abscis van die parabola, welker top in den oorsprong der coördinaten ligt, en de voorname as langs de abscissen-as, zoo wordt het vierkant of de tweede magt der overeenkomstige halve ordinaat uitgedrukt door:

$$\beta \cdot \frac{c^2}{a\,b} \cdot p\,.$$

Men neme eindelijk aan, dat de regthoek onder de halve assen der genoemde ellips gelijk zij aan dit vierkant; indien dan m en n de volstrekte lengten der halve assen van de ellips zijn, zal

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b}\,,\ \text{en}\ m\,.\,n = \beta . \frac{c^2}{a\,b} \cdot p$$

wezen. Hierdoor zal de vergelijking der ellips zijn

$$\beta \cdot \frac{c^2 p}{a^2} x^2{}_2 + \beta \cdot \frac{c^2 p}{b^2} y^2{}_2 = \beta \cdot \frac{c^2 p}{a^2} \cdot \beta \cdot \frac{c^2 p}{b^2}\,,$$

dat is:

$$b^2 x^2{}_2 + a^2 y^2{}_2 = \beta p \,.\, c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (\lambda)$$

Wanneer men derhalve aan p verschillende waarden geeft, van *nul* af tot zekere straks aan te wijzen grens, zal men telkens eene hyperbola ($\varkappa$) van andere afmeting hebben; met deze zal ook telkens een andere ellips (λ) overeenstemmen. Deze ellips en hyperbola concentrisch geconstrueerd zijnde, zullende elkander in *vier* punten snijden, en de opvolging der vierparen van punten zal eene kromme lijn doen ontstaan, welker ver-

vergelijking, onafhankelijk moetende zijn van elke waarde van p, klaarblijkelijk gevonden wordt door 1°. de coördinaten x_1, y_1 en x_2, y_2, welke in de vergelijkingen ($\varkappa$) en (λ) voorkomen, gelijk te stellen aan de loopende coördinaten x en y van de begeerde kromme lijn; 2°. door alsdan den veranderlijken parameter p uit de genoemde vergelijkingen te elimineren. Zulks doende, komt er

$$(b^2 x^2 + a^2 y^2)^2 = c^4 (\beta^2 x^2 - \alpha^2 y^2) \quad \ldots\ldots (46)$$

Hierdoor is dan betoogd eene wijze, waarop de vergelijking (ζ) kan voortkomen, en tevens eene wijze van ontstaan of van wording eener kromme lijn of eener soort van kromme lijnen, hebbende de vergelijking (ζ) tot algemeene aequatie. Dat deze kromme lijnen lemniscaten zullen moeten wezen, is ligtelijk in te zien, zoo men de snijding der opvolgende ellipsen en hyperbolen overweegt, en over de verandering van derzelver grootte, bij de trapswijze vermeerdering van p, een weinig nadenkt. — Tot zekere grens heeft men met elk paar ellipsen en hyperbolen steeds vier snijpunten; bij die grens evenwel slechts twee raakpunten, en voorbij die grens houdt de snijding op, ten blijke, dat de kromme begrensd en gesloten is. Die grens nu is $p = \frac{\beta}{b^2} c^2$; want met deze waarde van p zullen de vergelijkingen der hyperbola en ellips wezen

$$\beta^2 x^2_1 - \alpha^2 y^2_1 = \frac{\beta^4 c^4}{b^4},$$

$$b^2 x^2_2 + a^2 y^2_2 = \frac{\beta^2 c^4}{b^2}.$$

Zoowel de ellips als de hyperbola zal derhalve tot eerste as of halve eerste as hebben eene lijn $= \beta \cdot \frac{c^2}{b^2}$. Ergo kunnen deze kromme lijnen elkander niet snijden, maar raken elkander in de gemeenschappelijke toppen der eerste assen.

 Neemt

Neemt men voor p eene grootere waarde, b. v.

$$p = \beta . \frac{c^2}{b^2} + \delta ,$$

zoo heeft men eene hyperbola, welker halve eerste as is p, en de uitdrukking der waarde van de halve eerste as der overeenkomstige ellips zal wezen:

$$= \sqrt{\left\{\beta \frac{c^2}{b^2} + \delta\right\} . \beta . \frac{c^2}{b^2}} ,$$

en dus kleiner dan $\beta \frac{c^2}{b^2} + \delta$; ergo is, voorbij genoemde grens, de snijding der ellipsen en hyperbolen onmogelijk.

Deze constructie van lemniscaten, door gelijkvormige ellipsen en hyperbolen, leert ook deze waarheid, welke vroeger, in § I, reeds door voorbeelden bleek: dat vele lemniscaten zeer onderscheiden kunnen zijn in vorm en afmeting, en nogtans nabij den knoop hetzelfde beloop hebben. Want alle lemniscaten, begrepen in de gevondene aequatie, zullen, zoo lang $\frac{\beta}{\alpha}$ dezelfde waarde heeft, ook dezelfde raaklijnen in den knoop, en dus aldaar hetzelfde beloop hebben, terwijl overigens vorm en afmeting van a, b, c afhangen, aan welke men, in elke volledige constructie, telkens eene andere waarde zal kunnen geven.

Voor de gewone lemniscata wordt de constructie eenvoudiger. Stelt men namelijk $a = b$, $\alpha = \beta$, zoo is

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{c^4}{a^4} (x^2 - y^2),$$

waarvoor, vermits $(c^4 : a^4)$ eene verhouding is, kan geschreven worden

$$(x^2 + y^2)^2 = d^2 (x^2 - y^2),$$

en de constructie komt alsdan hierop neder.

Construeer, met eene willekeurige halve as p, eene gelijkzijdige hyperbola

$$x^2_1 - y^2_1 = p^2 .$$

Con-

Construeer eene parabola, hebbende eene gegevene lijn d tot parameter. Neem van deze parabola de ordinaat, hebbende p tot abscis, en beschrijf met dezelve, als radius, uit het centrum der gelijkzijdige hyperbola, een cirkel; deze snijdt de hyperbola, in het algemeen, in *vier* punten, welke zullen zijn punten der lemniscata van BERNOUILLI. Want de radius van den cirkel is $\sqrt{dp}$, en daarom de vergelijking van den cirkel

$$x^2_2 + y^2_2 = dp .$$

Stellende nu in deze, en in de voorgaande vergelijking, $x_1 = x_2 = x$ en $y_1 = y_2 = y$, en eliminerende p, zoo komt juist de aequatie der bernouillaansche lemniscata.

De overweging van bijzondere gevallen, overeenkomstig particuliere waarden van a, b, c, en zelfs overeenkomstig de teekens, die zij zouden kunnen hebben, geeft stof tot uitbreiding dezer beschouwing; doch het ligt buiten mijn oogmerk, hierover meer uit te weiden.

---

c. Door het betoogde sub **a** en **b** wordt aangeduid de wording van lemniscaten uit of door middel van kromme lijnen. Thans zal worden aangewezen, hoe de lemniscatische kromme lijnen uit de snijding van gebogene oppervlakken kunnen voortkomen, en wel, in de eerste plaats, hoe de lemniscaten kunnen beschouwd worden te zijn de projecticën der doorsnijding van gebogene oppervlakken. Bij voorkeur, en om de reeks van beschouwingen niet te zeer te verlengen, zal hier tot voorbeeld genomen worden de snijding van oppervlakken des tweeden graads. Oppervlakken van hoogeren graad kunnen nogtans evenzeer lemniscatische snijdingen geven; zonder van de snijdingen met platte vlakken te spreken, heeft men b.v. ook lemniscatische projecticën uit de snijding van eenig oppervlak des tweeden graads met een' kegel des vierden of eens hoogeren graads, hebbende eene lemniscata van de eerste, of van eene hoogere orde, tot rigtlijn.

Zij een kegel van den tweeden graad, en, meer bepaaldelijk, een elliptische kegel. Men neme den oorsprong der regtlijnige coördinaten in het middelpunt; de abscissen-as langs de voorname ware as der kegelvlakte, en de beide andere coördinaten-assen langs de beide andere hoofdassen, zoo is de vergelijking van het oppervlak:

$$b^2 c^2 x^2_1 - a^2 c^2 y^2_1 - a^2 b^2 z^2_1 = 0 ,$$

of

$$\alpha^2 x^2_1 - \beta^2 y^2_1 - \gamma^2 z^2_1 = 0 \text{ . . . . } (\mu)$$

zijnde a, b, c zoodanige getallenwaarden van lijnen, dat, als men op de as van x, en gerekend van den oorsprong, een deel neemt $= a$, en den kegel snijdt met een plat vlak, gaande loodregt door de as van x en door het uiteinde van het deel a, de ellips, uit die doorsnijding ontstaan, tot voorname of grootste en kleinste middellijnen hebbe lijnen, welker getallenwaarden zijn b en c.

Men denke ook eene ellipsoïde, hebbende p, q, r tot halve voorname assen, p de grootste, r de kleinste. Het centrum dezer ellipsoïde zij gelegen op de as van z, op een' afstand d van den oorsprong; de as $2p$ loope evenwijdig aan de as van x, dat is evenwijdig aan de ware as des kegels. De vergelijking dezer ellipsoïde zal alzoo wezen:

$$q^2 r^2 x^2_2 + p^2 r^2 y^2_2 + p^2 q^2 (z_2 - d)^2 = p^2 q^2 r^2 \text{ . . . } (\nu)$$

Is nu de ellipsoïde zoo geplaatst, dat zij den kegel kunne snijden — en waartoe de betrekking, die er tusschen a, c, p, r en d moet bestaan, gemakkelijk gevonden wordt — alsdan verkrijgt men de vergelijking der projectie van de kromme lijn, volgens welke de oppervlakken elkander doorsnijden, op het vlak xy, als projectie-vlak beschouwd, door, in de vergelijkingen (μ) en (ν), $x_1 = x_2 = x$ en $y_1 = y_2 = y$ te stellen, en daarna z te elimineren. Deze bewerking zal tot uitkomst geven:

q^2

$$\left\{q^2(\alpha^2p^2+\gamma^2r^2)x^2+p^2(\gamma^2r^2-\beta^2q^2)y^2\right\}^2+p^4q^4\gamma^4(d^2-r^2)^2=$$
$$=2p^2q^2\gamma^2\left\{q^2\left[\alpha^2p^2(d^2+r^2)-\gamma^2r^2(d^2-r^2)\right]x^2-\right.$$
$$\left.-p^2\left[\beta^2q^2(d^2+r^2)+\gamma^2r^2(d^2-r^2)\right]y^2\right\}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

en deze is de algemeene aequatie der horizontale projectie van de doorsnijdings-kromme der ellipsoïde met den kegel. Zij heeft den algemeenen vorm der vergelijkingen van lemniscatische kromme lijnen der eerste orde. Naar gelang d eene andere waarde heeft, zal de geprojecteerde kromme eene andere figuur hebben, en het is ligtelijk in te zien, dat deze figuur zal behooren tot twee der vormen van de cassinoïde, en óf uit twee afgescheiden ovalen zal bestaan, óf eene lemniscata zal zijn. Dit laatste is alleenlijk het geval, wanneer één der toppen van de as $2r$ der ellipsoïde door het middelpunt des kegels gaat; dus wanneer $d=r$ is, en alsdan wordt de vergelijking (47) die eener eigenlijke lemniscata, namelijk:

$$\{q^2(\alpha^2p^2+\gamma^2r^2)x^2+p^2(\gamma^2r^2-\beta^2q^2)y^2\}^2=4p^4q^4r^2\gamma^2(\alpha^2x^2-\beta^2y^2) \quad (47^*)$$

Voor den regten cirkelvormigen kegel is $\alpha=\beta$, en voor dien, welks beschrijvende lijn een' halven regten hoek maakt met de as, is $\alpha=\beta=\gamma$; ergo

$$\{q^2(p^2+r^2)x^2-p^2(q^2-r^2)y^2\}^2=4p^4q^4r^2(x^2-y^2) \quad . \; . \; (48)$$

De snijding van een' bol en elliptischen kegel zal, wegens $p=q=r$, geven:

$$\{(\alpha^2+\gamma^2)x^2+(\gamma^2-\beta^2)y^2\}^2=4r^2\gamma^2(\alpha^2x^2-\beta^2y^2) \quad . \; . \; (49)$$

Is de kegel regt, zoo is $\alpha=\beta$, en

$$\{(\alpha^2+\gamma^2)x^2-(\alpha^2-\gamma^2)y^2\}^2=4r^2\alpha^2\gamma^2(x^2-y^2) \quad . \; . \; . \; (50)$$

Is bovendien nog de hoek, tusschen de overstaande beschrijvende lijnen des kegels, regt, zoo is eenvoudiglijk

$$x^4=r^2(x^2-y^2).$$

Hoezeer uit deze vergelijkingen blijkt, dat uit de snijding van een elliptischen of cirkelvormigen kegel wel kunnen voortkomen lemniscaten,

 van

van welke de raaklijnen, gaande door den knoop, loodregt op elkander staan, zoo verkrijgt men in geen geval de lemniscata van Bernouilli. Maar de snijding van een' bol en kegel, in geval van dezen de zoogenaamde tophoek regt is, levert eene projectie op, welke is eene merkwaardige lemniscata; want de laatst verkregene vergelijking is dezelfde als de vergelijking (37) der lemniscata, over welke in § I, sub C, gehandeld is, gelijk dan ook, in eene noot aldaar, de wording dezer lemniscata uit de projectie der doorsnijding van een' bol en kegel reeds is vermeld. Doch het meer bijzondere, aan deze lemniscata toekomende, kan eerst te dezer plaatse worden opgemerkt, namelijk: *dat zij is de projectie eener sphaerische lemniscata, op de vooronderstelde wijze ontstaan, en zich juist over* de helft *van het bolvormig oppervlak uitstrekkende*, vermits de halve as r der lemniscatische projectie juist gelijk is aan den straal des bols, en dus juist is de projectie van een cirkel-quadrant.

/eens Men vindt even[redacted] lemniscaten uit eene soortgelijke doorsnijding van een kegel en cylinder, of uit die van een kegel en van eene elliptische paraboloïde. De snijding van eene ellipsoïde en van eene tweevlakkige hyperboloïde geeft tot projectie, op een der voorname middenvlakken, ovalen of ironden, met soortgelijke figuren uit den kegel verkregen, en met de ovalen van *Cassini* in verband staande. Om de wording van geheel symmetrische lemniscaten uit den kegel en den bol, of de ellipsoïde te verklaren, was het ook noodig, eene der assen van de ellipsoïde of eene middellijn van den bol te doen invallen met eene der imaginaire assen van den kegel. Wil men evenwel de zaak uit een algemeener oogpunt beschouwen, en ook op scheeve en on-symmetrische lemniscaten letten, zoo moet men deze beperking uitsluiten. Doch het opzettelijk onderzoek van de nu opgenoemde bijzondere punten, gelijk ook de toepassing der algemeene formulen (8) en (9) op eenige der bovenstaande vergelijkingen, b. v. (48) en (50), wordt thans nagelaten. Met een enkel woord echter verdient nog melding gemaakt te worden van het ontstaan eener lemniscatische projectie van eene niet vlakke kromme lijn, verkregen door de snijding van eene ellip-

lipsoïde of van een' bol met een' cylinder, of ook zelfs bij de snijding van twee cylinder-vlakken. Indien b. v. eene ellipsoïde of een bol door eene kegelvlakte gesneden wordt, is de kromme van doorsnijding zelve lemniscatisch, namelijk eene sphaerische lemniscata op den bol, of eene conische lemniscata op den kegel. Bij de snijding van een' bol en van een' cylinder, kan op geen dezer oppervlakken eene lemniscatische kromme lijn geboren worden; maar voor zekeren bijzonderen stand van het projectie-vlak, kan de projectie der kromme lijn van doorsnijding eene strikvormige gedaante erlangen.

Zij een cirkelvormige cylinder, hebbende een' radius r; hare as ga door den oorsprong der coördinaten, en de beschrijvende lijnen denke men evenwijdig aan het coördinaten-vlak xy. Zij ook een bol, wiens radius is ρ; het centrum zij, op een afstand van den oorsprong $=a$, in de as y gelegen; zoo dan ρ is $> a-r$, zal er snijding van den bol en van den cylinder plaats grijpen. De kromme lijn van doorsnijding zal eene geslotene kromme lijn wezen; hare projectie op het vlak xz is eene lijn van den vierden graad; die op het vlak xy is eene parabola, of wel een parabolische boog, en dus eene opene kromme lijn. Doch men draaije nu den cylinder opwaarts, zoodat zijne as, welke oorspronkelijk gerigt ware langs de as van x, wel in het vlak xz blijve, maar met de as x een' hoek make, van welke de goniometrische tangens is τ; hierdoor ondergaat de figuur der projectie op het vlak xz geene verandering, maar die op het vlak xy verkrijgt van lieverlede een ander beloop, en in zekeren hellenden stand van den cylinder zal dit beloop lemniscatisch wezen. Men kan zich hiervan, met een weinig nadenken, ligtelijk overtuigen, en de mogelijkheid ook uit de vergelijking der projectie opmaken. Voor de aequatie van de cylinder-oppervlakte, bij den vooronderstelden hellenden stand der as, vindt men,

$$\tau^2 x^2{}_1 + (1+\tau^2) y^2{}_1 + z^2{}_1 - 2\tau x_1 z_1 = r^2(1+\tau^2),$$

terwijl de aequatie van den bol is

$x^2{}_2$

$$x^2_2 + (y_2 - a)^2 + z^2_2 = \rho^2 .$$

Waaruit door eliminatie van z, na $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y_2 = y$, $z_1 = z_2 = z$ te hebben gesteld,

$$\{(\tau^2 - 1)x^2 + (1 + \tau^2)y^2 - (y - a)^2 + \rho^2 - r^2(1 + \tau^2)\}^2 =$$
$$= 4\tau^2 x^2 \{\rho^2 - x^2 - (y - a)^2\} .$$

Deze is de vergelijking der projectie op het vlak xy; opdat zij, indien de projectie lemniscatisch is, den vorm hebbe van de algemeene aequatie der lemniscaten van de eerste orde, zoo moet vooreerst de oorsprong der coördinaten verplaatst worden langs de as y, in voege, dat zij kome in den knoop der kromme lijn, en ten anderen moet τ, die nog onbepaald is, de voegzame waarde erlangen voor het ontstaan eener symmetrische lemniscatische projectie. En men ziet ligtelijk, dat dit resultaat kan verkregen worden, wanneer men $y = $ [illegible] $+ u$ substitueert, en in de ontwikkelde aequatie τ en u zoodanig bepaalt, dat de coëfficienten der onevene magten van y en de geheel standvastige termen verdwijnen.

---

d. Wanneer de snijding van eene gebogene oppervlakte met een plat vlak, eene lemniscatische projectie heeft, moet de doorsnijding zelve eene vlakke lemniscata wezen. Zoodanige oppervlakken, welker doorsneden met eenig willekeurig plat vlak, óf altijd, óf meestal, lemniscatisch zijn, zou men lemniscatische oppervlakken kunnen noemen, al waren dan deze doorsneden niet altijd van een eigenlijk gezegden lemniscatischen vorm, mits slechts met dezen vorm verwant. De omwentelings-oppervlakte, hebbende eene lemniscata tot beschrijvende lijn, de kegel- en cylinder-vlakken, hebbende eenige lemniscata tot rigtlijn, geven er, als van zelve, voorbeelden van. De lemniscatische oppervlakken van de eerste orde zijn oppervlakken van den vierden graad, en onder deze komt, als merkwaardig

dig voorbeeld, in bijzondere aanmerking, de *voetring* (*tóre*). Denkt men een' cirkel, welks vlak gelegen is in het coördinaten-vlak xy, en het centrum in de as van x, op den afstand a van den oorsprong der coördinaten, en laat men dezen cirkel (hebbende een' radius $=r$) om de as van y omwentelen, zoo is de vergelijking der voortgebragte ringvormige oppervlakte

$$\{x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\}^2=4a^2(z^2+x^2).$$

De snijding van dit oppervlak met een plat vlak zal kunnen wezen een ovaal, een ingedrukt ovaal, een koppel van ovalen, eene lemniscata, een koppel van concentrische of ook van niet concentrische, maar even groote, cirkels, enz. Deze uitkomsten zijn te zeer bekend, om er opzettelijk aanwijzing van te doen. Ten aanzien der snijdingen, welke lijnen van den vierden graad opleveren, bestaan derhalve alle die vormen, welke tot de cassinoïde behooren. De lemniscatische snijdingen heeft men door elk snijvlak, dat tevens raakvlak is voor eenig punt van het convex-concave of inwendige gedeelte des rings. Is b. v. dit snijdend raakvlak evenwijdig aan de as van omwenteling, zoo ontstaat er eene volstrektelijk symmetrische lemniscata, van welke de vergelijking onder regthoekige coördinaten, als de oorsprong in den knoop is, zal wezen

$$(x^2+y^2)^2 = 4a\{rx^2-(a-r)y^2\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (51)$$

Deze lemniscata behoort derhalve tot de soort, welke in § I, sub B, 2°, is overwogen, en welke de vergelijking (25) tot algemeene aequatie heeft. En wanneer $a=2r$, of $r=\frac{1}{2}a$ is, zal deze lemniscata overgaan in eene bernouilliaansche, hebbende a tot excentriciteit of $a\sqrt{2}$ tot halve assen.

Hierbij is $a>r$ vooronderstelde; stelt men $a=r$, zoo heeft de ring geene opening; het snijdend raakvlak is daarbij een vlak, gaande door het middelpunt en door de omwentelings-as, derhalve een meridiaanvlak; — de doorsnijding bestaat uit twee even groote cirkels, die elkander uitwendig raken. De lemniscata kan dus overgaan in een stelsel van twee cirkels, wanneer de beide leden van hare vergelijking quadraten zijn, of liever,

 wan-

wanneer het tweede lid, zoowel als het eerste, eene volledige tweede magt is. Men zou ook kunnen zeggen, dat de lemniscatische gedaante meer en meer nabij de cirkelvormige komt, naar gelang de hoek, tusschen de as en de centrale raaklijnen, meer en meer tot een' regten hoek nadert; of wel, twee even groote, elkander uitwendig rakende cirkels kunnen aangemerkt worden te zijn de strikken eener lemniscata, welker centrale raaklijnen loodregt staan op de ware as der kromme, en derhalve in of langs elkander vallen.

Men zou deze beschouwingen kunnen uitstrekken, hetzij om andere vormen van lemniscaten, hetzij om lemniscaten van hoogere orde te zien voortkomen, door aan te nemen, óf, dat de beschrijvende kromme lijn geen cirkel is, maar eene ellips, eene lemniscata of eene andere geslotene kromme lijn; — óf, dat de beschrijvende kromme geene standvastige afmetingen heeft, b. v. een cirkel met afnemenden radius, zoodat de ring, aan de eene zijde van het centrum, eene grootste, en, aan de tegenoverstaande zijde, eene kleinste dikte hebbe, enz. enz.

De voetring is een omwentelingsligchaam; de beschrijvende kromme is een cirkel, en de rigtlijn mede een cirkel, in welks omtrek het middelpunt der beschrijvende kromme steeds moet verblijven, terwijl het vlak der beschrijvende kromme voortdurend normaal tot de kromlijnige rigtlijn is. Maar de rigtlijn kan ook elliptisch wezen, of eene andere geslotene kromlijnige gedaante hebben, terwijl de beschrijvende lijn, cirkelvormig, elliptisch, enz. enz. kan zijn, zoodat de snijdende raakvlakken van deze anders gefigureerde ringen lemniscaten van zeer verschillend beloop zullen opleveren. Eveneens moet men lemniscatische snijdingen verkrijgen, wanneer de ring niet gesloten maar open is, gelijk een goot- of kanaal-oppervlak, waarbij alzoo de rigtlijn wederom geheel willekeurig kan zijn. Zelfs kan, in een algemeenen zin, de beschrijvende lijn ook open wezen; ware in dit geval de rigtlijn gesloten, en b. v. een cirkel of eene ellips, maar de beschrijvende lijn eene hyperbola, dan zou de ringvormige oppervlakte eigenlijk eene eenvlakkige hyperboloïde zijn, en de lemniscatische sectie zou uit

uit een stelsel van twee regte lijnen bestaan, welke tevens de plaats van centrale raaklijnen zouden bekleeden. Gelijk dus boven de verwantschap der lemniscata met den cirkel werd opgemerkt, blijkt hier wederom hare betrekking tot de regte lijn, genoegzaam zoo als dit met de kegelsneden het geval is.

Bijaldien men zich ter beschouwing voorstelde de oppervlakken van den vierden graad, die lemniscatisch zijn, en derhalve, door eenig willekeurig plat vlak gesneden zijnde, snijdingen zullen geven, welker vorm of beloop overeenkomt met den vorm der kromme lijnen, in § I overwogen, zou men, geheel in overeenstemming met de beschouwing der oppervlakken van den tweeden graad, het onderzoek moeten bepalen tot die oppervlakken, welker vergelijkingen begrepen zijn in de aequatie

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)^2 = \alpha^6x^2+\beta^6y^2+\gamma^6z^2 \quad \ldots . (52)$$

Ongetwijfeld zou dit onderzoek hoogst belangrijk wezen, en eene zeer ruime stoffe tot gewigtige en uitgebreide toepassingen der analysis opleveren. Hetzelve ligt evenwel buiten mijn bestek, en ik vestig eeniglijk de aandacht op deze soort van oppervlakken, welker vlakke snijdingen óf lemniscaten moeten wezen, óf kromme lijnen, die met de lemniscaten verwant zijn. Zoo is, b. v., in geval $\alpha^6 = \beta^6$, de voorname snijding in het coördinaten-vlak xy eene ovale kromme lijn, niet verschillende van de kromme in § I, sub A, overwogen. Zoo verre ik weet, zijn deze oppervlakken nog niet op eene algemeene en volledige wijze betracht, maar wel kent men sommige oppervlakken van deze soort, schoon niet bepaaldelijk als lemniscatische oppervlakken. Onder deze verdient allezins genoemd te worden de oppervlakte, welker beschouwing van aanbelang is in de *theorie der dubbele refractie*, en door FRESNEL onderscheiden met de benaming van *elasticiteits-oppervlakte*. De vergelijking van dit oppervlak is

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2 ;$$

de hoofdsnijdingen zijn de lemniscatische ovalen, welker punten zijn de voetpunten der normalen, uit het middelpunt eener ellips op hare raaklijnen getrokken, derhalve de zoogenaamde *voetpunten-kromme* der ellips (§ I, B, 1°). De voetpunten-kromme der hyperbola — zijnde eene eigenlijke lemniscata (§ I, B, 2°) — kan eveneens worden verkregen, wanneer de bovenstaande vergelijking beschouwd wordt als eene algemeene aequatie, welke diensvolgens, in haar tweede lid, één of twee termen met een negatief teeken kan hebben. En inderdaad kent men ook die vergelijking als te behooren tot zoogenaamde *voetpunten-oppervlakken*, welker punten namelijk zijn de voetpunten der normalen, getrokken uit het middelpunt eener oppervlakte van den tweeden graad op de raakvlakken van hare punten, gelijk men zich daarvan, door eene eenvoudige berekening, kan overtuigen. Overigens verwijs ik naar twee geleerde verhandelingen, de eene (van vroegere dagteekening) door PLÜCKER, over het *golven-oppervlak*, voorkomende in het 19 deel, pag. 1—44, van het *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, uitgegeven wordende door den heer CRELLE te *Berlijn*, — de tweede, uitsluitend over de hier bedoelde voetpunten-oppervlakken (en wel inzonderheid over derzelver quadratuur en cubatuur) door den Italiaanschen wiskundige TORTOLINI geschreven, en bekend gemaakt in hetzelfde *Journal*, deel 31, pag. 12—40.

---

e. Indien men goedvindt, om de wording eener lemniscata *mechanisch* te noemen, bijaldien zij ontstaat door de beweging van een punt, volgens zekere wet, welke kan voortkomen, hetzij uit eene beweging van regte of kromme lijnen langs kromme lijnen of langs gebogene oppervlakken, hetzij uit de werking van krachten op een stoffelijk punt, alsdan bestaan er ook van deze soort van generatie voorbeelden.

Men zou onder die voorbeelden kunnen rangschikken, dat van de veranderlijke beweging der schaduw van het uiteinde des stijls eens zonnewijzers, hetzij op den middag, hetzij op een ander dag-uur, opdat die scha-

schaduw steeds het oogenblik van middelbaren tijd aanwijze. Van dag tot dag verandert de plaats der schaduw van dien top, en over een geheel zonnejaar gerekend, vormen deze schaduw-einden — telkens in de doorsnijding van eene regte lijn en van een der takken eener hyperbola gelegen — de punten der zoogenaamde *meridiaan-kromme lijnen*, welke eene lemniscatische gedaante hebben, en van welke men, met behulp eener functie voor de tijds-vereffening, de vergelijking zou kunnen opmaken; maar het zijn lemniscaten met ongelijke en on-symmetrische strikken.

Als voorbeeld der beschrijving eener lemniscata door de beweging van een stoffelijk punt, kent men ook dat, bij hetwelk dit punt, onder de werking der zwaartekracht, gedwongen is, een' kromlijnigen boog te beschrijven, in denzelfden tijd, welke voor de daling langs de koorde gevorderd wordt. Deze kromme lijn is de bernouilliaansche lemniscata; maar het is slechts een boog, die beschreven wordt, en geenszins de geheele kromme lijn, door onafgebrokene beweging. In het XI deel, pag. 28, van het *Journal de mathématiques pures et appliquées*, door LIOUVILLE, wordt deze eigenschap der lemniscata vermeld, alsof zij gevonden ware door FUSS (*Mémoires de l'Acad. de St. Petersbourg, pour l'année 1824*). Ik vind nogtans in een engelsch werk, verschenen in 1842, en getiteld »*A collection of problems in illustration of the principles of theoretical mechanics, by* »WILLIAM WALTON" (pag. 239), dat deze eigenschap was opgemerkt door den italiaanschen wiskundige SALADINI, en bekend gemaakt in de »*Memorie dell' Istituto nazionali Italiano, Tomo I, parte 2,*" (het jaartal wordt niet opgegeven). Ook is dezelfde eigenschap in meer algemeenen zin uitgedrukt door BONNET, in hetzelfde aangehaalde deel van LIOUVILLE's *Journal*, pag. 116.

Bij de werking van ééne centrale kracht kan de lemniscata van BERNOUILLI door onafgebrokene beweging beschreven worden, wanneer de kracht haar middelpunt heeft in den knoop der lemniscata, en met een vermogen werkt, omgekeerd evenredig aan de *zevende magt* van den afstand tot het bewogen punt. Ook dit is opgeteekend en verklaard in het genoemde

 werk

werk van WALTON, pag. 190. En nog wordt er eene lemniscata van BERNOUILLI beschreven, wanneer een stoffelijk punt, onder de werking van twee krachten, met *eenparige snelheid* bewogen wordt. Daartoe moeten de krachten werken in twee vaste middelpunten; zij moeten, op gelijke afstanden van het stoffelijk punt, een gelijk vermogen uitoefenen, hetwelk, voor elke kracht afzonderlijk beschouwd, *omgekeerd evenredig is* aan de *eerste magt* van den afstand; en de beweging van het punt, met eene gegevene snelheid, moet aanvangen in het midden van de lijn, welke de middelpunten der werkende krachten verbindt (zie hetzelfde werk, pag. 178). (6)

Onder de lemniscaten van hoogere orde, die eene mechanische wording kunnen hebben, is eene soort van de tweede orde, omtrent welker beschrijving ik in eenige meerdere ontwikkeling wil treden, zoo om ten slotte een voorbeeld te geven, toepasselijk op lemniscaten eener andere orde dan de vroeger beschouwde, als omdat ook de wording dezer lemniscaten aan die van BERNOUILLI toekomt. Men kent deze wording uit de werking van een mechanisch orgaan, onder anderen in stoommachinen voorkomende.

Zij AB of BAC (*fig.* 1) een hefboom, draaibaar om eene spil bij A; A′B′ een tweede, hooger of lager geplaatste hefboom, of eenvoudiglijk een arm, draaibaar om eene spil bij het uiteinde A′. Laat aangenomen worden, dat de rigtingen dezer hefboomen in hetzelfde vlak zijn gelegen, dat de armen AB en A′B′ even lang zijn, en dat, het vlak dezer hefboomen verticaal zijnde, de horizontale afstand van derzelver draaipunten gelijk zij aan het dubbel der lengte van elk der armen AB of A′B′; zoo dan de hefboomen horizontaal gerigt zijn, zal de rigting van de lijn BB′, door de vrije uiteinden B en B′ gaande, verticaal wezen, en invallen met eene der inwendige raaklijnen MN van de beide even groote cirkels, door de uiteinden B en B′ beschreven, wanneer elk der hefboomen gedraaid wordt. De-

(6) Zeer waarschijnlijk zal dit andere voorbeeld der beschrijving eener lemniscata afgeleid zijn uit eene beschrijving van EULER, voorkomende in zijne *Mechanica sive motus scientia*, Tomo I, Prop. 92, Cor. 1.

/ af /olein

Deze vooronderstellingen worden tot meerdere eenvoudigheid aangenomen; volstrekt noodzakelijk is zulks niet.

Men denke verder de uiteinden B en B′ gekoppeld door eene stang BPB′, hebbende eene lengte, gelijk aan den verticalen afstand der draaipunten A en A′. Deze koppeling hebbe plaats door middel van spillen of scharnieren bij B en B′, zoodat, als b. v. de hefboom AB op- of nedergedraaid wordt door den boog BD of BE, deze beweging kunne gevolgd worden door de *koppelstang* BB′ en den arm A′B′, die daarbij verschillende standen zullen aannemen, van welke de beide uiterste in de figuur zijn voorgesteld bij DD′, D′A′ en EE′, E′A′. Is nu P het midden der koppelstang, en zijn de bogen BD en BE van geene veel grootere uitgestrektheid dan van ongeveer 18 of 20 graden, zoo blijft het punt P, staande den op- en nedergang der hefboomen, genoegzaam in de rigting der raaklijn MN, en met de afwisselend cirkelvormige beweging van den hefboom CAB wordt alzoo, zeer nabij, eene afwisselend regtlijnige beweging verkregen van het punt P, en dus ook van eenig werktuigelijk deel (b. v. eener pompstang, enz.), dat, bij P, met eene spil, aan de koppelstang BB′ mogt verbonden zijn. De arm A′B′ is hier dus eene zoogenaamde *trekstang*, welke dient om de koppelstang BB′, bij de beweging van den hefboom CAB, voortdurend zooveel terug te trekken, als noodig is om te voorkomen, dat het midden P merkbaar van de verticale rigting afwijke.

Op grond der werking van dit eenvoudig zamenstel berust de inrigting, door James Watt aan de balansen van zijne verbeterde stoomwerktuigen gegeven, om, met tusschenkomst van een zoogenaamd scharnier-parallelogram, de afwisselend draaijende beweging eener balans te ontleenen van de op- en nedergaande beweging eener stoom-zuigerstang, zonder dat deze merkbaar afwijke van de zuiver regtlijnige rigting, noch eene te nadeelige trillende beweging (door de afwijkingen aan wederzijden van de regte lijn veroorzaakt) erlange. Watt maakte op eene vernuftige wijze gebruik van dit middel; het behoort hem nogtans niet, maar was reeds vroeger bekend geweest, en ter beweging van stangen bij pompwerken aangewend.

Het

Het is overigens onnoodig, om nader te verklaren, hoedanig dit mechanisch orgaan in de zamenstelling van het stoommachinen-parallelogram voorkomt, ook al ware de inrigting niet zeer bekend, noch in geschriften over, of in beschrijvingen van stoomwerktuigen, omstandig aangewezen.

Gelijk gezegd is, zal de beweging van het punt P slechts nabij regtlijnig wezen. Draait men den hefboom CAB verder en verder op of neêr, zoo wijkt P meer en meer van de lijn MN af, en de beweging zoo verre uitstrekkende als mogelijk is, zal P eene symmetrische lemniscata beschrijven, hebbende haren knoop in het punt, alwaar AA′ en MN elkander snijden, dat is in het inwendig gelijkvormigheidspunt der beide cirkels, door B en B′ beschreven, en alwaar P zich bevindt, bijaldien de rigtingen van beide hefboomen of armen AB, A′B′ evenwijdig loopen, zoo als de figuur voorstelt. De as dezer lemniscata staat loodregt op de middelpuntslijn AA′, en de lijn MN is ééne der centrale raaklijnen. Het punt P beschrijft dus eigenlijk dat gedeelte van een' lemniscatischen boog, hetwelk, aan wederzijden van den knoop der kromme lijn, weinig van de centrale raaklijn afwijkt, en vermits in sommige lemniscaten deze afwijking niet zeer spoedig aangroeit, zoo is daarin de reden gelegen, waarom men, voor geene te ver uitgestrekte op- en neêrgangen der hefboomen, de beweging van het punt P genoegzaam regtlijnig kan achten; moetende de grenzen van die uitgestrektheid bepaald worden overeenkomstig de betrekkelijke lengten der hefboomen en der koppelstang.

Meetkundig voorgesteld, komt het onderzoek neder op de bepaling der kromme lijn, beschreven door het midden eener regte lijn van bepaalde lengte, welke verplaatst wordt tusschen de omtrekken van twee even groote cirkels, zoodat hare uiteinden steeds in deze omtrekken verblijven. Het is duidelijk dat dit problema slechts een zeer bepaald geval insluit van een meer algemeen werkstuk, bij hetwelk de cirkels A en A′, benevens de regte lijn BB′, door kromme lijnen (die zelfs niet vlak behoeven te wezen) worden vervangen, en het punt P eenig willekeurig punt der bewogene kromme lijn is. Ook in den meer beperkten zin van cirkels en regte lijnen is

het-

het voorgesteld problema niet algemeenst; daartoe zou men moeten aannemen willekeurige lengten voor de hefbooms-armen AB, A'B', eene willekeurige plaats voor het beschrijvende punt P der koppelstang, en zoodanige verwijdering der middelpunten A en A', dat, in den evenwijdigen stand der hefbooms of der armen AB, A'B', de rigting der koppelstang BB' geene raaklijn tot de beide cirkels ware. Voor het tegenwoordig oogmerk wordt evenwel alleenlijk het nu laatstgenoemde gedeelte der meer algemeene vooronderstelling aangenomen, zoodat AB = A'B', BB' willekeurig, maar P het midden van BB' zij.

Laat (*fig.* 2) de lijn XX', loodregt door het midden O van de lijn AA' der middelpunten getrokken, als abscissen-as worden aangenomen, en alzoo de onbepaalde lijn YY', op welke deze middelpunten liggen, als ordinaten-as; zij $OA = OA' = a$, $AB = A'B' = r$, en de lengte der koppelstang $BB' = b$; in elken stand der lijnen AB, A'B' en BB' moeten derhalve de coördinaten $OQ = x$ en $PQ = y$ van het midden P der lijn BB' bepaald worden; zoo men de coördinaten van B noemt $Oa = x_1$, $aB = y_1$, en (overeenkomstig den in de figuur voorgestelden stand der lijnen) die van B', $Oa' = -x_2$, $B'a' = -y_2$, zal *vooreerst* de plaats der punten B en B' bepaald wezen door de vergelijkingen der beide cirkels, te weten door

$$x^2_1 + (a - y_1)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$x^2_2 + (a + y_2)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

Ten *anderen* heeft men de voorwaarde $BB' = b$ door de aequatie

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = b^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

En in de derde plaats

$$OQ = x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

$$PQ = y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\epsilon)$$

Eene vergelijking tusschen x en y, dat is de vergelijking der lemniscatische kromme lijn, zal men hebben bij de eliminatie van x_1, y_1, x_2, y_2,

uit deze *vijf* vergelijkingen. Op het eenvoudigst geraakt men daartoe op deze wijze: neem het verschil van (α) en (β); substitueer daarin de waarden van $(x_1 - x_2)$, $(x_1 + x_2)$, $(y_1 + y_2)$, afgeleid uit (γ), (δ), (ε), zoo komt men tot:

$$x^2\{b^2 - (y_1 - y_2)^2\} = y^2\{2a - (y_1 - y_2)\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; (\zeta)$$

Neem de som van (γ) en die der tweede magten van (δ) en (ε); trek er van af de som van (α) en (β); los uit dit verschil $(y_1 - y_2)$ op, en substitueer de waarde in (ζ), waardoor men verkrijgen zal:

$$x^2\{16a^2b^2 - [b^2 + 4(a^2 - r^2) + 4(x^2 + y^2)]^2\} =$$
$$= y^2\{8a^2 - [b^2 + 4(a^2 - r^2) + 4(x^2 + y^2)]\}^2 \quad . \; . \; . \; . \; (53)$$

Deze is de vergelijking der lemniscata, zijnde eene lijn van den zesden graad, of eene lemniscata van de tweede orde. Men kan deze vergelijking ook brengen tot den vorm:

$$\{(x^2 + y^2)[b^2 + 4(a^2 - r^2) + 4(x^2 + y^2)] - 8a^2y^2\}^2 =$$
$$= 16a^2x^2\{b^2x^2 - (4a^2 - b^2)y^2\}, \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

welke meer overeenkomt met den vorm der vergelijkingen van de lemniscaten der eerste orde. Stelt men O als pool, en de polaire coördinaten ρ en φ, en verder tot bekorting

$$A = b^2 + 4(a^2 - r^2),$$

zoo is de ontwikkelde pool-aequatie

$$16\rho^4 + \{8A - 64a^2 \sin.^2\varphi\}\rho^2 = 16a^2b^2 - A^2 - 64a^2r^2 \sin.^2\varphi \quad . \; (55)$$

Wanneer men in de vergelijking (54) x standvastig aanneemt, zal de ontwikkelde aequatie zijn eene derde-magts-vergelijking van den zesde-magts-vorm; twee der wortels zullen onbestaanbaar wezen, en de bestaanbare wortel y^2 zal twee gelijke maar tegenovergestelde waarden van y doen bekend worden; bovendien wordt $y = 0$ voor $x = 0$ en $x = \pm\sqrt{\{r^2 - (a - \frac{1}{2}b)^2\}}$, en tusschen deze grenswaarden van x is y steeds bestaanbaar, maar onbestaanbaar voorbij dezelve; en hieruit kan met grond

grond tot den symmetrischen lemniscatischen vorm der kromme besloten worden. Dat de kromme wezentlijk lemniscatisch, en, ten opzigte der beide lijnen XX′ en YY′, symmetrisch is, wordt nogtans gemakkelijker uit de poolvergelijking (55) opgemaakt.

De lemniscata verkrijgt andere vormen, of de vergelijkingen (54) en (55) leveren stoffe op tot meer of minder belangrijke opmerkingen, naar gelang der bijzondere betrekkingen tusschen de parameters a, b en r.

1°. Zoo lang b. v. de lijn BB′ korter is dan de afstand der middelpunten, dat is, zoo lang $b < 2a$, bestaat er voor de hoeken OAB en OA′B′ een maximum, voorbij hetwelk geene beweging der stangen mogelijk is. Van af die grens moet de beweging in den tegengestelden zin plaats grijpen, en van beide de armen AB, A′B′ worden alsdan ook de hoeksbewegingen verwisseld. De beschrevene lemniscata zal daarbij steeds zoodanig gerigt wezen, dat hare as invalle met de abscissen-as XX′. Maar wordt $b = 2a$, alsdan kan elk der armen den geheelen omtrek van den overeenkomstigen cirkel rondgaan; de as der lemniscata valt daarbij langs de as YY′, en de lemniscata zelve wordt van eene lagere orde, te weten van de eerste orde, en verschilt ook niet van die, welke uit de gewone hyperbola oorsprong neemt. Men kan dit uit de vergelijkingen (ζ) en (54), of ook uit (55) opmaken. De vergelijking (54) b. v. wordt, in de vooronderstelling van $b^2 = 4a^2$, volkomen quadraat in het tweede lid, en na den wortel te hebben getrokken, vindt men bij verdere eenvoudige herleiding

$$(x^2+y^2)^2 - r^2(x^2+y^2) + 2a^2x^2 = \pm 2a^2x^2.$$

Daar nu met het bovenste teeken de vergelijking tot een' cirkel behoort, en zulks wel mogelijk is en ook moet, als de armen AB en A′B′ steeds te gelijk aan dezelfde zijde van YY′ blijven (zoodat zij voortdurend parallel blijven, gelijk alsdan ook BB′ evenwijdig blijft aan YY′), maar in strijd is met de vooronderstelde tegengestelde rigting en beweging dier armen, zoo moet in het tweede lid der voorgaande aequatie het onderste teeken genomen worden, en de eindvergelijking wordt daardoor

$$(x^2+y^2)^2=r^2y^2-(4a^2-r^2)x^2\ ,$$

welke vergelijking, bij verwisseling der coördinaten x en y, behoort tot eene lemniscata der eerste orde, welke is de zoogenaamde voetpuntenkromme der gewone hyperbola (vergelijk § I, B, 2°. aequatie (25)), hebbende r en $\sqrt{(4a^2-r^2)}$ tot halve ware en onbestaanbare assen. De as der lemniscata zal dus $=2r$ wezen, en de tangenten, gaande door den knoop O, zullen met de as een hoek maken $>45°$, zoo lang de cirkels A en A′ elkander niet snijden, of ook, bijaldien zij elkander snijden, zoo lang $a^2>\frac{1}{2}r^2$ is.

2°. Wordt $4a^2=2r^2$, of $a^2=\frac{1}{2}r^2$, zoo gaat de lemniscata over in eene bernouilliaansche, hebbende $2r$ tot as en de middelpunten A en A′ der beide cirkels tot brandpunten. Deze beide cirkels moeten elkander, in dit geval, zoodanig snijden (*fig.* 3), dat de lengte der gemeenschappelijke koorde BB′ juist gelijk zij aan den afstand der middelpunten A en A′; want alsdan is $OB=OB'=OA=OA'=a$, en dus $2.OA^2=AB^2$, of $2a^2=r^2$ (7).

Indien AB, A′B′, BB′ een zamenstel van stangen ware, om, uit eene afwisselend cirkelvormige of draaijende beweging, eene afwisselend op- en neêrgaande of heen en weêrgaande beweging af te leiden, of omgekeerd, zou de regtlijnige beweging gerigt moeten wezen langs de lijn CC′, deelende den regten hoek AOB midden door. Om goede redenen heeft men bij

(7) Hieruit volgt derhalve eene constructie, zoowel der bernouilliaansche lemniscata, als van die, welker punten zijn de projectiën van het centrum eener ongelijkzijdige hyperbola op hare raaklijnen. Voor de uitvoering is zij geenszins de doelmatigste, doch zij is merkwaardig, als verkregen wordende door eene onafgebrokene beweging, en onafhankelijk van de voorafgaande constructie eener hyperbola. In dezen zin is over de constructie dier beide lemniscaten reeds gehandeld, in het *Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von* J. A. Grunert, *Professor zu Greifswald, Theil III, Seite 400*, en *Theil VIII, Seite 50*.

bij stoommachinen van zoodanig zamenstel weinig gebruik gemaakt; — meestal bepaalt men den stand der cirkels zoodanig, dat zij elkander niet snijden, en zelfs niet raken. Vroeger heeft men zich evenwel bij sommige stoomwerktuigen — of ook bij werktuigen, door eenige beweegkracht gedreven, en bestemd om pompen te doen werken — van een zamenstel bediend, veel overeenkomst met het hier bedoelde hebbende, om eene op- en neêrgaande beweging uit eene aanhoudend rondgaande beweging te verkrijgen, wanneer de afwijkingen van de regtlijnige rigting geen nadeel aan de uitwerking konden toebrengen (zie b. v. LANZ et BÉTANCOURT, *Essai sur la composition des machines* § VII, (S, 7') Planche 11).

3°. De vergelijkingen (54) en (55) verkrijgen ook nog eene meer eenvoudige gedaante, wanneer b, a en r zich zoodanig verhouden, dat, als in den evenwijdigen stand der armen Ab, A'b' (*fig.* 2) de verbindingslijn bb' door den knoop O gaat, deze lijn tevens eene raaklijn tot de beide cirkels is. Daartoe moet $(\frac{1}{2}b)^2 + r^2 = a^2$, of $b^2 = 4(a^2 - r^2)$ wezen; doch veelal is dan ook nog in de toepassing (*fig.* 1) $b = r$, en dus $a^2 = \frac{5}{4}r^2$. De vergelijking (54) wordt daardoor, na divisie met 4,

$$\{2(x^2+y^2)^2 + r^2(x^2-4y^2)\}^2 = 5r^4x^2(x^2-4y^2);$$

zoo men deze ontwikkelt, alsdan den term $r^4(x^2-4y^2)^2$ in het tweede lid brengt, nogmaals door 4 deelt, en bij de termen, in het tweede lid, voegt $r^4x^2y^2 - r^4x^2y^2$, komt er eene aequatie, deelbaar door (x^2+y^2), en het quotient is

$$(x^2+y^2)\{(x^2+y^2)^2 + r^2(x^2-4y^2)\} = r^4(x^2-4y^2) \quad . \; . \; (56)$$

en de poolvergelijking wordt

$$\rho^4 + r^2(1-5\,sin.^2\,\varphi)\rho^2 = r^4(1-5\,sin.^2\,\varphi), \; . \; . \; . \; . \; . \; (57)$$

of, beknopter,

$$1-5\,sin.^2\,\varphi = \frac{\rho^4}{r^2(r^2-\rho^2)}\,.$$

r zal steeds grooter dan ρ wezen, en de hoek tusschen de as en de cen-

trale raaklijnen kleiner dan 30°. De volstrekte grootste waarde van ρ vindt men door ρ^2, en wel door deze uitkomst: zoo men het vierkant r^2 van den straal des cirkels in uiterste en middelste reden verdeelt, zal de inhoud van den grootsten der twee regthoeken, dat is der twee deelen van r^2, gelijk zijn aan den inhoud ρ^2 van het vierkant, op de halve as der lemniscata beschreven. En van den hoek, tusschen de as en de centrale tangenten, is de volstrekte waarde zeer nabij 26° 34′.

4°. Voor het geval, dat laatstgenoemde hoek 45° bevatte, zou de overeenkomstige lemniscata meest met die van Bernouilli moeten overeenkomen. De vraag is, welke betrekking moet daartoe tusschen b en r bestaan? *Vooreerst* moet de onderstelling van het voorgaande geval ook hier aangenomen worden, te weten $b^2 = 4(a^2 - r^2)$; — althans eene andere vooronderstelling, in plaats van dezelve, zou eerder iets willekeurigs inhouden. Ten *anderen* leert de vergelijking (55) eene grenswaarde van $\sin.^2 \varphi$, wanneer $\rho = 0$ wordt; stelt men deze waarde, voor $\varphi = 45°$, $= \frac{1}{2}$, en substitueert men daarin $a^2 = r^2 + \frac{1}{4} b^2$, zoo komt $b = 2r$. Zullen alzoo de centrale tangenten der lemniscata, door het punt P (*fig.* 1) beschreven, loodregt op elkander staan, of halve regte hoeken met de as der lemniscata maken, zoo moet de koppelstang BB′ $= b$ eens zoo lang wezen als elke der gelijke trekstangen AB of A′B′. Ergo zal dan BP $=$ AB zijn; dus hoek APB $= 45°$; waaruit dus voortvloeit dit bijzondere, dat de centrale tangenten der lemniscata ook juist zullen wezen de inwendige raaklijnen van de beide cirkels, door de hefbooms-einden B en B′ om de vaste middelpunten A en A′ beschreven. Deze bijzonderheid bestaat niet bij het voorgaande geval, als $b = r$ is; want BB′ $=$ AB zijnde, is BP $= \frac{1}{2}$ AB; derhalve is hoek APB $= 60°$, en zijn complement BPX $= 30°$, terwijl de hoek, tusschen de as der beschrevene lemniscata en de centrale tangenten niet is 30°, maar zeer nabij 26° 34′.

Voor het onderwerpelijke geval van $b = 2r$, en $a^2 = 2r^2$, zal men uit (54) en (55) voor de vergelijkingen der lemniscata vinden:

(x^2

$$(x^2+y^2)\{(x^2+y^2)^2+4r^2(x^2-y^2)\}=4r^4(x^2-y^2)\ .\ .\ .(58)$$

$$\rho^4+4r^2\rho^2\cos.2\varphi=4r^4\cos.2\varphi\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (59)$$

De halve as dezer lemniscata is dus, evenmin als die der lemniscata van het voorgaande geval, gelijk aan den radius r der cirkels; hare volstrekte grootte is $=r\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0{,}9096.r$. Bijaldien men derhalve, tusschen dezelfde centrale tangenten, eene bernouilliaansche lemniscata construeert, hebbende r tot halve as, zal de hier overwogene lemniscata van de tweede orde geheel en al binnen de lemniscata van Bernouilli gelegen zijn: haar beloop, in de nabijheid van den knoop, zal dus eenigzins spitser wezen, dat is spoediger van de rigtingen der raaklijnen afwijken, dan bij de bernouilliaansche lemniscata plaats vindt. Noemt men, op de rigtingen der voerstralen ρ, de lengte der voerstralen van de bernouilliaansche lemniscata R, zoo is $R^2=r^2\cos.2\varphi$, ergo kan men, ingevolge de vergelijking (59), stellen

$$\rho^4+4\rho^2R^2-4r^2R^2=0\ ,$$

of

$$R^2=\frac{\rho^4}{4(r^2-\rho^2)}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (60)$$

zijnde eene niet onbelangrijke betrekking, tusschen de hoegrootheden der eveneens gerigte voerstralen van de beide weinig verschillende lemniscaten, en van welke, onder anderen, voor de rectificatie van de hier bedoelde lemniscata der tweede orde, gebruik gemaakt zou kunnen worden.

De onderstelling van $b=2r$ kan nog in een ander geval genomen worden, zoodat de beschrevene lemniscata is van de eerste orde, maar de lijn BB' kan daarbij nimmer raaklijn van de beide cirkels wezen. Dit geval heeft plaats als men $a=r$ neemt; de beide cirkels raken elkander alsdan, en b nu $=2r$ stellende, dat is $b=2a$, verkrijgt men wederom eene lemniscata, met hare as langs de middelpuntslijn AA′ gerigt, klaarblijkelijk zoo als in het eerste der vier overwogene gevallen, en vermits de halve

as

as der lemniscata ook nu nog $= r$, dat is $= a$ is, zullen hare toppen zijn de beide middelpunten A en A′.

Nog andere onderstellingen tusschen b, r en a, meer of minder overeenkomende met die, welke men in het werkdadige aanneemt, worden hier buiten overweging gelaten, en ik eindig deze korte beschouwingen met eene enkele opmerking, aangaande den weg, dien men zou moeten volgen bij het onderzoek, wanneer de hefbooms-armen AB en A′B′ ongelijk in lengte waren. Zijn namelijk deze armen ongelijk, dan is *niet* het midden P der koppelstang het punt, welks rigting van beweging op zekere uitgestrektheid genoegzaam regtlijnig is, indien de hefboomen afwisselend gedraaid worden, maar de beschouwing leert, dat deze uitwerking nabij zal plaats vinden, zoo het beschrijvend punt der koppelstang is het punt, verdeelende hare lengte in de omgekeerde reden van de stralen der cirkels, door de uiteinden der armen of trekstangen beschreven. Laten AB en A′B′ (*fig.* 4) de ongelijke armen wezen, die om de vaste punten A en A′ draaijen, en door de koppelstang BB′ vereenigd zijn; even zoo als in het geval van gelijke of even lange armen, kan hier de betrekking tusschen de lengten AB, A′B′, AA′, BB′ zeer verschillend wezen. Neemt men b. v. aan, dat bij de evenwijdige rigting der armen AB en A′B′ — werkelijk voorgesteld in de figuur, — de rigting der koppelstang BB′ invalt met de overeenkomstige inwendige raaklijn der beide cirkels, zoo is het snijpunt O met de middelpunts-lijn AA′ tevens het inwendige gelijkvormigheidspunt der beide cirkels, en in dit punt wordt de lijn BB′ gedeeld in de regte reden der stralen AB en A′B′. Makende derhalve, B′P = BO, zoo is P het punt, in hetwelk de verdeeling van BB′ in de omgekeerde reden van de stralen AB en A′B′ plaats vindt: dit punt der koppelstang zal dan, bij eene niet zeer uitgestrekte afwisselend draaijende beweging der hefboomen, genoegzaam regtlijnig heen- en weêr- of op- en neêrgaan, en dit punt zal derhalve ook het beschrijvende punt der lemniscata wezen. Wegens BO = B′P, is er een stand der hefboomen of armen, bij welke de rigting BB′ nogmaals door het punt O gaat, zoodat tevens P zich in O bevindt;

de

de lemniscata zal derhalve ook door het punt O gaan, en O zal hare knoop wezen. Men moet daarom, bij het bepalen der vergelijking van de kromme lijn, den oorsprong der coördinaten niet op het midden van AA′ nemen, maar in het inwendige gelijkvormigheids-punt der beide cirkels. Met gelijke cirkels is dit eveneens het geval, maar uithoofde van die gelijkheid ligt het gelijkvormigheids-punt juist op het midden der middelpuntslijn. De vorm dezer vergelijking zal te eenemale verschillen van dien der vergelijkingen van de boven beschouwde lemniscaten, want de lemniscata heeft hier eene geheel andere gedaante; hare strikken zijn wel symmetrisch ten opzigte van de as YY′, maar geenszins ten opzigte van de as XX′; deze strikken zijn scheef; er zijn geene evenwijdige koorden, welker middenpunten op eene regte lijn gelegen zijn; de lemniscata heeft daarom geene eigenlijke ware as, of liever hare ware as is kromlijnig. Het een en ander kan uit de figuur worden opgemerkt, in welke de kromme lijn voor het geval van A′B′ = 2AB is geschetst; men ziet bovendien, dat de inwendige raaklijnen der beide cirkels raaklijnen zijn tot de punten P en P′ der lemniscata, en dat de kromme lijn, aan wederzijden van deze punten, zeer langzaam van de regtlijnige rigting dezer raaklijnen afwijkt, zoodat, als de arm AB, boven en onder de rigting CABD, bogen van geene groote uitgestrektheid beschrijft, het punt P ook zeer nabij in eene regte lijn zal heen en weêr gaan.

---

§ III.

Hetgeen ik mij voorstelde te ontvouwen over kromme lijnen, die een juisten, een eigenlijk gezegden lemniscatischen vorm hebben, is in de beide voorgaande §§ begrepen. Ik kan evenwel niet nalaten, ten slotte nog van

eeni-

eenige andere kromme lijnen te gewagen, welke, óf door vorm eenige betrekking tot de lemniscaten schijnen te hebben, óf welker vergelijkingen met die der lemniscaten van de eerste orde min of meer verwant zijn, òf tot welke men, bij eene beschouwing der lemniscaten, als van zelve geleid wordt, en door welker onderzoek men tot enkele belangrijke uitkomsten geraakt.

---

a. De eigenlijke lemniscaten van de eerste orde zijn kromme lijnen, die steeds dezelfde punten van overeenkomst hebben. Zij bestaan uit twee gelijke en gelijkvormige strikken, symmetrisch ten opzigte van twee loodregte assen; zij hebben eene regtlijnige as, op welke twee toppen der kromme lijn aanwezig zijn, en in het midden een' knoop; van de toppen zijn de raaklijnen loodregt op de as gerigt; door den knoop gaan twee raaklijnen, makende met de as scherpe hoeken; zij hebben ook dezelfde algemeene wording, en hare vergelijkingen zijn begrepen in dezelfde algemeene vergelijking. Niettemin kan men vele eenvoudige en verschillende constructieën bedenken, door welke kromme lijnen verkregen worden, in vorm aan de lemniscaten nabijkomende, hoezeer zij geenszins tot het geslacht der lemniscaten behooren.

Men denke b. v. een' cirkel, neme eene middellijn als as aan, en trekke stralen, die den omtrek in zekere punten α zullen snijden; uit deze punten late men loodlijnen $\alpha\beta$ op de as neder, en brenge deze loodlijnen met cirkelbogen, uit de punten α als middelpunten beschreven, op de eerstgenoemde stralen over, dat is elke loodlijn op dien straal, uit welks einde zij is nedergelaten. Deze constructie, in alle vier quadranten herhaald, geeft op de gezamenlijke stralen eene reeks van punten, uitmakende de punten van een kromlijnig beloop, dat in zeker opzigt lemniscatisch kan genoemd worden.

Het bijzondere van dit beloop ligt daarin, dat het schier op eene tegengestelde wijze bestaat ten opzigte van het beloop der lemniscata van Ber-

Bernouilli. Indien men deze laatste, bij den knoop, in twee helften scheidt, en dezelve alsdan, zonder omkeering, van plaats verwisselt, zoodat de toppen nu bij het centrum, alwaar eerst de knoop was, in aanraking komen, en de beide hoeken of spitsen van den oorspronkelijken knoop nu toppen worden op dezelfde lijn, welke ook eerst de as was, dan zal men genoegzaam den vorm hebben voorgesteld van de kromme lijn, welker constructie zoo even is opgegeven. Zij is dus, als het ware eene lemniscata met spitse toppen; de raaklijnen, door deze toppen gaande, maken ook, even als de centrale raaklijnen der bernouilliaansche lemniscata, halve regte hoeken met de as, maar door den knoop zal nu slechts ééne raaklijn gaan. Overigens dient de vergelijking van den vorm der kromme lijn met dien, welke, op voorzegde wijze, door middel eener bernouilliaansche lemniscata, zou kunnen verkregen worden, alleenlijk tot opheldering of begrip der uitkomst van de constructie; want er moge overeenkomst bestaan ten opzigte der rigting van de genoemde raaklijnen, de ligging der punten is toch met betrekking tot de assen zeer verschillend.

De poolvergelijking der kromme lijn is

$$r = \pm\, a(1 - sin.\varphi)\,,$$

zijnde a de halve as en r de voerstraal. De vergelijking onder orthogonale coördinaten is van den vierden graad. De inhoud en de omtrek worden gevonden in bepaalde functiën van r of van φ, maar voor het tegenwoordig oogmerk geven zij geene aanleiding tot belangrijke opmerkingen.

Men kan dezelfde constructie herhalen in eene ellips, hebbende a en b tot halve assen. De poolvergelijking der voortgebragte kromme lijn zal wezen

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 (1 - sin.\varphi)^2}{a^2.\,sin.^2\varphi + b^2.\,cos.^2\varphi}\,;$$

onder regthoekige coördinaten is hare vergelijking van den achtsten graad met termen, die allen van evene afmeting zijn. Op dezelfde wijze kan men

met elke geslotene kromme lijn te werk gaan, de lemniscaten zelve niet uitgezonderd.

Men kan ook, in eene ellips, op elken centralen voerstraal, en wel van af het middelpunt, — en niet van den omtrek, — overbrengen de projectie van den voerstraal op de as a of op de as b. Werkte men op een' cirkel, dan zou men in elk quadrant een halven' cirkel verkrijgen, en door de volledige constructie zouden derhalve ontstaan twee rakende cirkels, begrepen in dezelfde vergelijking $r = \pm a \cos. \varphi$. Bij eene ellips ontstaat echter geene zamenvoeging van twee ellipsen, maar eene verbinding van twee ovalen, begrepen in de vergelijking:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 \cos.^2 \varphi}{a^2 . \sin.^2 \varphi + b^2 . \cos.^2 \varphi} = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 . \tang.^2 \varphi},$$

en de strikvormige kromme, uit de vereeniging dezer twee ovalen bestaande, zal, even als de lemniscaten, die in § 1 zijn overwogen, tot de lijnen van den vierden graad behooren. De rectificatie-formule is afhankelijk van een irrationaal polynomium van den achtsten graad, zonder dat de vorm door symmetrie eenigzins belangrijk is. De vergelijking der kromme heeft eenige overeenkomst met de algemeene vergelijking (3) der lemniscaten van de eerste orde, zijnde het onderscheid alleenlijk gelegen in de afmeting van den noemer der gebrokene uitdrukking, welke het tweede lid der vergelijkingen is. Ook op nog zeer vele andere wijzen kan men, door het overbrengen van zekere lijnen op de centrale voerstralen eener ellips, of eener andere symmetrische en in zich zelve wederkeerende kromme lijn, tot vormen van kromme lijnen geraken, die met den lemniscatischen vorm eenige overeenkomst hebben; maar het onderzoek is van een te gering belang, om er langer bij te vertoeven.

---

b. De wiskundige SERRET kwam, bij de beschouwing van de rectificatie der gewone lemniscata en der cassinoïde, op het denkbeeld der behandeling van de meer algemeene vergelijkingen:

$$r^m = a^m . \cos. m\varphi,$$

$$r^{2m} - 2a^m r^m . \cos. m\varphi + a^{2m} = b^{2m},$$

inhoudende de bijzondere vergelijkingen van lemniscaten en cassinoïden van hoogere orden. Bij de inleidende beschouwingen (§ I, hier voor) is ook opgemerkt de nog algemeenere vergelijking (6), welke tot onderscheidene andere lemniscaten van hoogere orden kan behooren. Lettende nu op den vorm dezer vergelijkingen, zoo wordt men gebragt tot het denkbeeld der beschouwing van zoodanige andere vormen, welke uit de voorgaande ontstaan, door eenvoudiglijk de coëfficiënten en exponenten der polaire coördinaten en der parameters met elkander te verwisselen. Daardoor ontstaan, zoo men b. v. slechts let op de twee bovenstaande vergelijkingen, deze twee vormen:

$$\left.\begin{aligned} r &= a . \cos.^{\frac{m}{m}} \varphi \\ r &= \frac{b - a}{1 - a . m . \cos.^m \varphi} \end{aligned}\right\} , \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

kunnende, tot meerdere algemeenheid, het dubbele teeken voor de tweede leden gesteld worden, wanneer m een geheel, positief en even getal is. Is m geheel en positief, even of oneven, zoo behoort de eerste vorm tot de vergelijkingen eener soort van kromme lijnen, welke bestaan uit de zamenvoeging van twee eironden, met de minder bolle of meer spitse toppen naar elkander gekeerd en tegen elkander sluitende, zoodat het geheele beloop min of meer lemniscatisch is. De tweede vorm behoort tot vergelijkingen van kromme lijnen, die én eene ovale, én eene dubbel strikvormige gedaante kunnen hebben; — zoo is b. v. voor $m = 2$ de vorm der aequatie niet onderscheiden van dien der vergelijking (11), in § I behandeld. Om in geene te breede ontwikkelingen te treden worde hier de aandacht, voor eenige oogenblikken, slechts gevestigd op den eersten vorm

 $r =$

$$r = a \cdot cos.^m \varphi ,$$

en dan ook met het eenige doel om de uitkomsten te doen kennen van de quadratuur en der rectificatie van sommige der kromme lijnen, welker vergelijkingen in dezen vorm begrepen zijn.

Voor de quadratuur heeft men

$$\partial . \mathrm{I} = \tfrac{1}{2} r^2 \partial\varphi = \tfrac{1}{2} a^2 . cos.^{2m} \varphi . \partial\varphi ,$$

en de bepaalde quadratuur, tusschen de grenzen $\frac{1}{2}\pi$ en 0, geeft diensvolgens, dien inhoud door A_m beteekenende,

$$\mathrm{A}_m = \tfrac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cos.^{2m}\varphi . \partial\varphi = a^2 \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(2m+1)} . 2^{2m-2} =$$

$$= 2^{2m-3} . a^2 \frac{\left\{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\right\}^2}{m\Gamma(2m)} ,$$

of wel

$$= 2^{2m-3} . \frac{a^2}{m} . \frac{\Gamma^2\left(\frac{2m+1}{2}\right)}{\Gamma(2m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

De quadratuur dezer kromme lijnen is derhalve merkwaardig, omdat zij belangrijke betrekkingen kan opleveren tusschen de waarde der functie Γ van verschillende wortels, of ook, omdat zij meetkundige voorstellingen van die functie geeft, even zoo als dit plaats heeft bij het onderzoek der rectificatie van de lemniscaten $r^m = a^m . cos. m\varphi$, door den Heer SERRET in het werk gesteld (*Journal de* LIOUVILLE, Tome VII, pag. 114).

Aangezien men heeft, uit bekende uitkomsten van integratie,

$$\Gamma(2m) = 1 . 2 . 3 . 4 \ldots . (2m-1) ,$$

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) = \frac{1 . 3 . 5 . 7 \ldots . (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi} ,$$

zal, m geheel en positief zijnde, de verhouding tusschen de inhouden der qua-

quadranten van twee kromme lijnen, elkander opvolgende in de orde van m en $m+1$ (en dus in derzelver vergelijkingen exponenten hebbende, welke éénc éénheid verschillen), steeds standvastig wezen, en wel

$$= \frac{m+1}{m\,.\,2m\,.\,(2m+1)}\ ,$$

waaruit blijkt, hoezeer de inhouden verminderen bij het toenemen van m, dat is bij het smaller en smaller worden der eironde strikken.

Indien m gebroken is, verkrijgt men, door de inhouden der quadranten van de kromme lijnen, meetkundige voorstellingen van de eigenlijke functie Γ. Het geval van $m = \frac{1}{2}$ moet echter uitgezonderd worden; want de inhoud der kromme, hebbende

$$r = \pm\, a \sqrt{cos.\,\varphi}$$

tot vergelijking, is volstrektelijk bepaald of meetbaar, zijnde

$$A_{\frac{1}{2}} = 2a^2\,.\,2^{-2}\,.\,\frac{\Gamma^2(\frac{2}{2})}{\Gamma(1)} = \tfrac{1}{2}\,a^2\,.$$

Verder zal men hebben

$$\left.\begin{array}{ll} A_{\frac{1}{3}} = 3a^2\,.\,2^{-\frac{7}{3}}\,.\,\dfrac{\Gamma^2(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\ ; & A_{\frac{1}{4}} = 4a^2\,.\,2^{-\frac{5}{2}}\,.\,\dfrac{\Gamma^2(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\ ; \\ A_{\frac{1}{5}} = 5a^2\,.\,2^{-\frac{13}{5}}\,.\,\dfrac{\Gamma^2(\frac{7}{10})}{\Gamma(\frac{2}{5})}\ ; & A_{\frac{1}{6}} = 6a^2\,.\,2^{-\frac{8}{3}}\,.\,\dfrac{\Gamma^2(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}\ ; \\ A_{\frac{1}{7}} = 7a^2\,.\,2^{-\frac{19}{7}}\,.\,\dfrac{\Gamma^2(\frac{9}{14})}{\Gamma(\frac{2}{7})}\ ; & A_{\frac{1}{8}} = 8a^2\,.\,2^{-\frac{11}{4}}\,.\,\dfrac{\Gamma^2(\frac{5}{8})}{\Gamma(\frac{1}{4})}\ ; \\ \text{enz.} & \text{enz.} \end{array}\right\}\ldots(63)$$

Nu is $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, en $\Gamma(\frac{1}{3})$ vindt men uit $\Gamma(\frac{2}{3})$ door de bekende betrekking

$$\Gamma(p)\,.\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{sin.\,p\pi}\ ;$$

want

want $\Gamma(\frac{2}{3})$ heeft men onmiddellijk uit $A_{\frac{1}{6}}$, wijl door dezelfde betrekking $A_{\frac{1}{6}}$ herleid wordt tot

$$A_{\frac{1}{6}} = 6a^2 \,.\, 2^{-\frac{8}{3}} \frac{\sin.\frac{2}{3}\pi}{\pi} \,.\, \Gamma^3(\tfrac{2}{3}) \,.$$

$\Gamma(\frac{3}{4})$ heeft men uit $A_{\frac{1}{4}}$, en daarmede dan ook $\Gamma(\frac{1}{4})$.

Door $m = \frac{2}{5}$ en $= \frac{3}{5}$ te stellen, verkrijgt men twee vergelijkingen, in welke zullen voorkomen $\Gamma(\frac{9}{10})$, $\Gamma(\frac{4}{5})$ en $\Gamma(\frac{11}{10})$, $\Gamma(\frac{6}{5})$; deze hangen dus af van $\Gamma(\frac{1}{10})$ en $\Gamma(\frac{1}{5})$, welke beide derhalve uit de herleide vergelijkingen zullen kunnen opgelost worden.

Met $\Gamma(\frac{1}{5})$ heeft men $\Gamma(\frac{2}{5})$ uit $A_{\frac{1}{5}}$, vermits uit de bekende betrekking

$$2^{2p-1} \,.\, \Gamma(p) \,.\, \Gamma(p + \tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} \,.\, \Gamma(2p)$$

gevonden wordt eene waarde van $\Gamma(\frac{7}{10}) = \Gamma(\frac{1}{5} + \frac{1}{2})$ in functie van $\Gamma(\frac{2}{5})$ en $\Gamma(\frac{1}{5})$.

$\Gamma(\frac{3}{5})$ wordt bekend uit $\Gamma(\frac{6}{10}) = \Gamma(\frac{1}{10} + \frac{1}{2})$.

$\Gamma(\frac{4}{5})$ heeft met uit $A_{\frac{3}{5}}$, door eerst $\Gamma(\frac{6}{5})$ op te lossen.

En zoo kan men voortgaan met het aannemen van verschillende positieve gebrokene waarden voor m, om, voor regelmatig opvolgende wortels, meetkundige voorstellingen van Γ aan te wijzen. Met goed gevolg maakt men daartoe ook gebruik van negatieve gebrokene waarden voor m, mits de algemeene formule voor den inhoud aldus schrijvende

$$A_m = a^2 \,.\, 2^{2m-2} \,.\, \frac{\Gamma^2\left(\frac{2m+1}{2}\right)}{\Gamma(2m+1)} \,.$$

Men kan ook, in de oorspronkelijke formule, $r = a \cos.^m \varphi$, m geheel en negatief stellen. De kromme lijnen worden alsdan de omgekeerde van die, in welker vergelijkingen m als positieve exponent voorkomt, en zijn derhalve opene kromme lijnen. Voor $m = +1$ wordt de kromme een cirkel, hebbende a tot middellijn; $m = -1$ zijnde, zoo behoort de polaire aequatie tot eene regte lijn,

lijn, rakende genoemden cirkel middellijnig tegenover de pool. In het polaire stelsel is dus de omgekeerde van een' cirkel de regte lijn, mits de oorsprong in den omtrek genomen zij, terwijl de omgekeerde een cirkel zou wezen, indien de oorsprong in het centrum gelegen ware.

Voor $m = 2$ is de kromme gevormd uit twee tegen elkander sluitende eironden, waarvan de constructie gemakkelijk is, en eenigermate zamenhangt met die der lemniscata, in § I sub C beschouwd. Is $m = -2$, zoo heeft men de hyperbolische kromme met parabolische asymptoten, van welke mede in § I sub C (in de eerste noot, welke in dat artikel voorkomt) gewaagd is.

Zoo kan men ook m van den gebroken vorm $\pm \frac{p}{q}$ nemen, maar dit geval wordt onmiddellijk tot een der voorgaande gebragt; de uitkomsten zijn mede niet onbelangrijk.

Geeft de quadratuur der kromme lijnen, welker vergelijkingen begrepen zijn in de aequatie $r = a \cdot cos.^m \varphi$, belangrijke resultaten, zoo verdienen dezelfde kromme lijnen ook opmerking ten aanzien der rectificatie, omdat, zoo als de quadratuur in vele gevallen eene meetkundige voorstelling oplevert der functieën Γ, eveneens door de rectificatie meerendeels voorstellingen van gewone en van ultra-elliptische functiën worden verkregen. De rectificatie-formule wordt namelijk:

$$\partial s = a \cdot \partial \varphi \cdot cos.^{m-1} \varphi \sqrt{(1 + (m^2 - 1)\, sin.^2 \varphi)}\,.$$

Deze formule is integreerbaar, bijaldien m is een geheel positief of negatief *even* getal. Is m geheel, positief of negatief, maar *oneven*, zoo hangt de rectificatie af van elliptische functieën der eerste en tweede soort, gelijk ligtelijk wordt ingezien.

Is m een positief of negatief gebroken, b. v. een positief gebroken van den vorm $\frac{1}{n}$, dat is, heeft men

$$r^n = a \cdot cos. \varphi\,,$$

zoo wordt

$$\partial s = a\,\partial\varphi\,.\,cos.^{\frac{1}{n}-1}\varphi\,\sqrt{\left\{1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)sin.^2\,\varphi\right\}}\;;$$

zijnde, als het ware, eene combinatie eener Γ met eene elliptische functie der tweede soort. Maar indien men in deze formule $sin.\,\varphi = x$ stelt, en van eene der bekende herleidings-formulen bij het integreren van irrationale uitdrukkingen gebruik maakt, zal men bevinden, dat de integratie afhangt van zoogenaamde *Abeliaansche functieën*, hebbende den niet onbelangrijken vorm

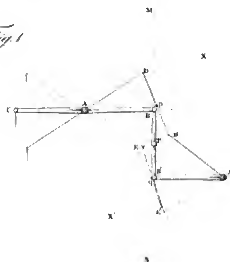
$$\frac{y^n\,.\,\partial y}{\sqrt{(p + qy^n + ry^{2n})}}\,,$$

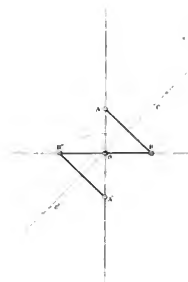
welke voor $n = 2$ en $n = 4$ nog tot gewone elliptische functiën kan gebragt worden. Korter of spoediger nadert men evenwel het doel, door de rectificatie-formule afhankelijk te maken van den voerstraal r, tot dit einde $cos.\,\varphi = \frac{1}{a}\,r^n$, $sin.^2\,\varphi = 1 - \frac{1}{a^2}\,r^{2n}$, $\partial\varphi = -\frac{nr^{n-1}\,\partial r}{\sqrt{(a^2 - r^{2n})}}$ substituerende, waardoor men komen zal tot

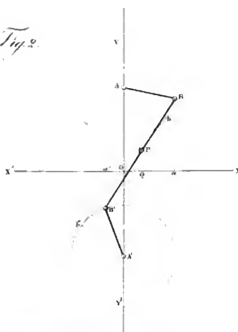
$$\partial s = -a^{\frac{n-1}{n}}\,.\,\frac{(a^2 + (n^2-1)r^{2n})\,\partial r}{\sqrt{(a^2 - r^{2n})\,(a^2 + (n^2-1)\,r^{2n})}} =$$

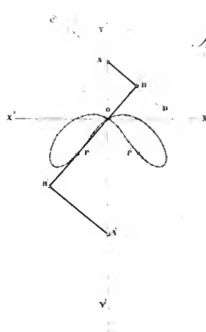
$$= -\frac{a^{\frac{n-1}{n}}\,[a^2 + (n^2-1)\,r^{2n}]\,\partial r}{\sqrt{\{a^4 + (n^2-2)\,a^2 r^{2n} - (n^2-1)\,r^{4n}\}}}\;\;.\;.\;.\;(64)$$

Uit de aequatie der cassinoïden van hoogere orde is SERRET tot eene genoegzaam gelijkvormige uitkomst gekomen (*Journal de Math.* par LIOUVILLE, Tom. VIII, page 501).









Lith. van Meyer & Corté

(5)

OPMERKINGEN

OVER ZEKERE SOORT VAN

KROMME LIJNEN,

WELKE MEN *OMGEKEERDE* OF *TEGENOVERGESTELDE KROMME LIJNEN* ZOU KUNNEN NOEMEN.

DOOR

G. J. VERDAM.

OPMERKINGEN

OVER ZEKERE SOORT VAN

KROMME LIJNEN,

WELKE MEN *OMGEKEERDE* OF

TEGENOVERGESTELDE KROMME LIJNEN ZOU KUNNEN NOEMEN.

DOOR

G. J. VERDAM.

De algemeenste vorm der lengte-uitgebreidheid is de kromme, kromlijnige of gebogene. Op zich zelve beschouwd, niet als vorm, maar als geslacht, kan men de gebogene lengte-uitgebreidheid verdeelen in eenige vormen, bij welke eene groote hoeveelheid van neven-vormen, en eene oneindige verscheidenheid van mindere vormen of onder-vormen behooren; ook de regte lijn heeft onder deze eene plaats. Tusschen bepaalde groepen van kromme lijnen bestaat naauw verband, kennelijk uit de stelkundige of transcendentale vergelijkingen, door welke het beloop of de figuur van dezelve wordt beteekend en voor den geest gesteld, zóó dat de wording of formatie van den eenen vorm uit den anderen, de overgang van de eene kromme lijn tot de andere, de verwantschap van het eene beloop

 tot

tot het andere, uit die vergelijkingen kan afgeleid en onder bepaalde voorwaarden kan vastgesteld en opgemaakt worden. Dit verband is evenwel niet beperkt tot, niet ingesloten door de bepaalde groep of orde van kromme lijnen, welke men mogt op het oog hebben; — hetzelve strekt zich verder uit, brengt de eene groep tot de andere, knoopt ze zamen, en maakt van de schijnbaar onzamenhangende deelen een onafgebroken geheel. In een logischen zin kan hieromtrent wel geen twijfel gevoed worden, want de bepaling van kromme lijn drukt een zelfde kenmerk voor allen uit; maar deze zin wordt hier niet bedoeld; onderscheidene kenmerken moeten overeenstemmen of bepaald verband tusschen elkander hebben. Is dit in een meetkundigen zin wel zoo gemakkelijk om aan te toonen, niet op eene algemeene wijze, maar in elk bijzonder geval bepaaldelijk en zonder willekeur? Met andere woorden, kunnen de figuren en de vergelijkingen van kromme lijnen, die in verschillende groepen verschillende plaatsen hebben, wel zoo gemakkelijk en ongedwongen de eene uit de andere worden afgeleid, zoodat men de eene kromme lijn op eene natuurlijke wijze uit de andere ziet geboren worden? Ontkennend moet deze vraag beantwoord worden. Eerder zou men slagen om de wording uit of door eene regte lijn te verklaren. Men kan namelijk eene onbepaalde regte lijn omgebogen denken, gedraaid, gewrongen en zoodanig geleidelijk gekromd, dat uit deze vormverandering alle denkbare kromme lijnen van verschillend beloop, van verschillende rigting in een plat vlak, of naar de meest onderscheidene streken der ruimte, ontstaan. De regte lijn is op deze wijze de zoogenaamde *omwikkelde* lengte-rigting van alle kromme lijnen, en deze zijn wederkeerig *omwikkelingen* van de regte lijn in de opvolgende rigtingen, welke zij, bij de draaijing of buiging, moet hebben. Hieruit is duidelijk dat, om uit de vergelijking der regte lijn die van eenige kromme lijn af te leiden, tot welker beloop zij is omgebogen, dat is van welke zij, in alle mogelijke standen, raaklijn is, de *parameters* of standvastige termen en coëfficienten, in de vergelijking der regte lijn voorkomende, slechts op eene voegzame wijze veranderlijk ge-

gesteld en afhankelijk gemaakt moeten worden van de doorgaande of loopende coördinaten, behoorende tot de snijpunten der opvolgende rigtingen, in welke de regte lijn, bij hare ombuiging, achtervolgens komt.

De vergelijking der regte lijn bevat, in het algemeen, twee parameters. Stelt men deze veranderlijk en gelijk aan zekere functie van coördinaten, en neemt men daarvoor alle denkbare stelkundige of transcendentale uitdrukkingen, zoo komt men tot eene oneindige verscheidenheid van vergelijkingen, welke tot even zoovele verschillende of verschillend gelegene kromme lijnen zullen behooren. Maar zoo het al niet moeijelijk ware, om daardoor de verschillende groepen der kromme lijnen van opvolgende orde, en ook die van verschillenden aard, te doen uitkomen, zou deze wijze van afleiding of formatie eenigzins gedwongen zijn.

Voor de eenvoudigste vlakke kromme lijnen, voor die van de tweede orde namelijk, is het zeer gemakkelijk in te zien, hoe derzelver eenvoudigste vergelijkingen in verband staan met die eener regte lijn, welke niet door den oorsprong der regthoekige coördinaten gaat. Want van zoodanig gerigte lijn is de aequatie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \pm 1,$$

terwijl de middelpunts-aequatieën van den *cirkel*, van de *ellips* en van de *hyperbola*, wel één graad hooger zijn, maar niet verschillend in vorm. Nemende nu a en b veranderlijk, en wel volgens zoodanige wet, dat a bestendiglijk omgekeerd evenredig is aan x, en b omgekeerd evenredig aan y, of dat steeds de regthoeken onder a en x, b en y, onveranderlijke inhouden hebben, zoo komt men, naar gelang die inhouden gelijk of ongelijk zijn, tot de middelpunts-vergelijkingen van den cirkel en van de gelijkzijdige hyperbola, of tot die van de ellips en der hyperbola.

Neemt men b omgekeerd evenredig aan x, a omgekeerd evenredig aan y, en de redens, in het algemeen, verschillend, zoo ontstaat de vergelijking der hyperbola met betrekking tot hare asymptoten.

 Om

Om de vergelijking der parabola te verkrijgen, moet men $a = x$, en b evenredig aan de verhouding $\frac{x}{y}$ stellen. En onder elke der gestelde wetten of betrekkingen zal de oorspronkelijke regte lijn, in hare verschillende standen, in de daad eene raaklijn of zoogenaamde omgewikkelde lijn (*enveloppée*) van alle de genoemde kromme lijnen wezen.

Dezelfde wijze van beschouwen is toepasselijk op het platte vlak, uit welks vergelijking de vergelijkingen der oppervlakken van den tweeden graad, door gelijkvormige veranderingen der parameters, zullen voortvloeijen, zoodat deze de omwikkelingen (*enveloppes*) van het omgebogene of omgewikkelde platte vlak zullen zijn.

Kon men op eene stelselmatige wijze de vergelijkingen van alle kromme lijnen uit die der regte lijn afleiden, zonder die kromme lijnen vooraf te kennen, dan zou het ook meest natuurlijk zijn, daartoe aan te wenden de vergelijking der regte lijn, welke niet door den oorsprong gaat, omdat de regte lijn alsdan kon beschouwd worden als, in hare verschillende standen, omwikkeld door eene kromme lijn, en deze als uit de ombuiging eener regte lijn te ontstaan. Maar zonder hierop te letten, kan het voorgestelde doel ook bereikt worden door middel der vergelijking van de regte lijn, welke door den oorsprong der coördinaten gaat. Men heeft b. v. onmiddelijk uit $y = ax$ de vergelijking der *Apollonische* en der *Neilsche* of *Heuraetsche parabola* door $a = \frac{p}{y}$ en $a = \frac{px}{y^2}$ te stellen. Ook die der overige kromme lijnen van den tweeden graad en die van andere kromme lijnen, welke men vooraf bekend stelt, volgen er gemakkelijk uit; maar de verschillende standen der regte lijn hebben hier eene andere beteekenis, en de regelmaat van afleiding ontbreekt evenzeer als bij de eerstgenoemde wijze van beschouwen.

In plaats van een stelselmatig verband tusschen het meerendeel van bekende kromme lijnen, of van bepaalde groepen derzelve, te willen opsporen, kan men zich tot punt van onderzoek voorstellen, het beloop of

den

den aard na te gaan van kromme lijnen en gebogene oppervlakken, welker vergelijkingen ontstaan, door de vergelijkingen van zekere gegevene kromme lijnen of oppervlakken, of door sommige termen van dezelve, enkele elementen en parameters, volgens eene bepaalde wet te vervormen, of te doen veranderen. Voor het meerendeel der kromme lijnen toch kan men enkele termen, enkele leden, enkele factoren van hunne vergelijkingen aanmerken als gedeelten der vergelijkingen van andere kromme lijnen. De vergelijkingen der eerste kunnen dan gedacht worden te ontstaan, door, van vergelijkingen dier andere, eenig lid, beide leden, eenigen term, meer termen, eenig element, beide elementen enz. te beschouwen als zekere functie der coördinaten van de eerste kromme lijnen, en door die functieën bestaat dan het verband tusschen geheel verschillende kromme lijnen, en kan men, door de eigenschappen van deze, dikwijls die van gene nagaan. Stelt men b. v. in de middelpunts-vergelijking van een cirkel

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1,$$

de abscissen onafhankelijk veranderlijk, maar de ordinaten y afhankelijk van andere ordinaten y', zoodat deze hebben eene standvastige reden van r tot r', zoo wordt de getransformeerde vergelijking die eener ellips. Neemt men in de vergelijking der *apollonische* parabola, $y^2 = px$, de coördinaten x en y beide functieën van twee andere coördinaten v en w, en wel zoodanig, dat y^2 aan de som en x^2 aan het verschil van v^2 en w^2 gelijk worde, dan zal de eerste functie voorstellen de vergelijking van een veranderlijken cirkel, en de tweede functie die eener veranderlijke gelijkzijdige hyperbola. Wanneer nu deze functieën door de aequatie $y^2 = qx$ verbonden worden, ontstaat er tusschen de drie genoemde kromme lijnen zeker verband, en de kromme lijn, welke dit verband vertegenwoordigt, is

is de in onderscheidene opzigten zoo merkwaardige *Lemniscata* of strikvormige kromme van JACOB BERNOUILLI.

Deze voorbeelden kunnen met nog zeer vele vermeerderd worden, maar eene bepaalde, eene regelmatige, eene algemeene beschouwing heeft men door dezelve niet. Deze kan alleenlijk bepaald zijn en tot uitkomsten van eenig belang voeren, wanneer men de vergelijkingen van kromme lijnen volgens dezelfde wet verandert of transformeert. Natuurlijk kan dit op oneindig vele wijzen geschieden. Men bepale zich b. v. tot de vlakke kromme lijnen; derzelver vergelijkingen houden twee elementen x en y in. Neemt men aan, dat y overal verwisseld wordt met dezelfde gegevene functie van een ander element y, en x met eene zelfde functie eener andere x, zoo ontstaan andere vergelijkingen, tot andere kromme lijnen betrekking hebbende, doch welke nu geacht kunnen worden tot eene zelfde bepaalde soort van kromme lijnen te behooren, omdat zij uit of door andere kromme lijnen, volgens dezelfde wijze van verandering, voortkomen.

Onder de eenvoudigste wijzen, op welke men de betrekkingen tusschen de abscissen en ordinaten van kromme lijnen regelmatig kan veranderen, door eene onveranderlijke wijze van vervorming der vergelijkingen, is er ééne, in beschouwing en gebruik niet ten eene male van belang ontbloot, en op welke geene aandacht schijnt gevestigd te zijn. Eenige vlugtige opmerkingen deswegens, en de ontwikkeling, in hoofdtrekken, van eenige bijzonderheden, welke genoemd onderwerp van beschouwing raken, mogen hier volgen.

Wanneer men uit de vergelijking eener vlakke kromme lijn (doch met vereischte wijziging is hetzelfde toepasselijk op kromme lijnen van velerlei kromming en op gebogene oppervlakken) het element y oplost, en in eene functie van het onafhankelijk veranderlijk element x uitgedrukt denkt,

denkt, ontstaat er eene betrekking van den vorm $y = \pm f(x)$. Men kan van deze betrekking zeggen: zij is zoodanig, dat de *som* of het *verschil* van y en $f(x)$ gelijk *nul* is, of, algemeen, eene onveranderlijke waarde heeft. Nog kan men zeggen: de betrekking is zoodanig, dat het *quotient* van y en $f(x)$ standvastig is. En nu valt van zelve de vraag, welke is de beteekenis eener betrekking, in welke niet de som of het verschil noch het quotient, maar het *product* eene standvastige waarde zou hebben, eene waarde, ter eenvoudigste bepaling der begrippen, gelijk aan de *éénheid?* Zoo dan $y.\ f(x) = 1$ is, zal $y = \frac{1}{f(x)}$ zijn. Het eerste lid der oorspronkelijke vergelijking is derhalve gebleven, zoo als hetzelve was, maar het tweede lid is omgekeerd geworden; of ook het eerste lid y is omgekeerd, en het tweede lid is gebleven. Hierdoor is de verklaring der beteekenis van de nieuwe of getransformeerde functie tusschen de abscissen en ordinaten zeer gemakkelijk; want zij behoort tot eene kromme lijn, met de eerstgedachte dezelfde abscissen hebbende, maar van welke de getallenwaarden der ordinaten zijn de wederkeerige of omgekeerde getallenwaaarden der ordinaten van de oorspronkelijk gedachte kromme lijn.

Wanneer de oorspronkelijke functie is stelkundig en ingewikkeld, zoodat zij, na het wegmaken van irrationale vormen, eene onbepaalde hoogere magts-vergelijking is met twee onbekende elementen, behoeft men y niet opgelost te denken in eene functie van x. Dit werd zoo even aangenomen tot betere uitdrukking der meening, maar zoodanige oplossing (al ware zij op eene algemeene wijze mogelijk) behoeft niet in het werk gesteld te worden. Want stellende overal $\frac{1}{y}$ in plaats van y, zoo heeft men eene nieuwe æquatie, welke, ten opzigte van y, zal wezen de vergelijking tot de omgekeerde wortels, behoorende tot eene kromme lijn, welker ordinaten zijn de, in getallenwaarde, omgekeerde ordinaten van de oorspronkelijke kromme lijn. En hieruit volgt van zelve, dat het ge-

stelde evenzeer toepasselijk is op kromme lijnen, hebbende eene transcendentale ingewikkelde vergelijking. Eindelijk nog, dat diezelfde transformatie ook geldt, wanneer de coördinaten niet zijn regtlijnig, maar polair of kromlijnig in het algemeen; eenvoudigheidshalve wordt echter hier meerendeels op het regtlijnig en regthoekig coördinaten-stelsel gelet.

De kromme lijnen, op voorzegde wijze geformeerd, zouden, ten opzigte der oorspronkelijk gestelde kromme lijnen, eigenaardigst *wederkeerige kromme lijnen* kunnen genoemd worden. Evenwel wordt deze benaming meermalen, schoon dan ook in een anderen zin, bij de beschouwing van poollijnen gebezigd, en om in geene omschrijving te vervallen, zoo als die van *kromme lijnen met ordinaten van omgekeerde getallenwaarde*, moge men de benaming van *omgekeerde* of *tegenovergestelde kromme lijnen* aannemen, mits daarbij deze kromme lijnen niet op zich zelve denkende, maar in verband met de kromme lijnen, welke tot hare wording dienden, en welke men dan als *oorspronkelijke kromme lijnen* moet aanmerken.

De beschouwing der omgekeerde kromme lijnen, in verband met die, uit welke zij oorsprong nemen, geeft aanleiding tot de navolgende hoofdzakelijke opmerkingen.

I.

Daar de omgekeerde kromme lijnen dezelfde abscissen en dezelfde grenzen van abscissen hebben als de oorspronkelijke, maar ordinaten van omgekeerde getallenwaarden, zoo stemmen, in het algemeen (want er bestaan uitzonderingen), groote ordinaten met kleine, kleine met grootere overeen, nul met oneindig en oneindig met nul, maxima met minima en omgekeerd, regt met krom, parabolisch met hyperbolisch, regts gebogen

gen met links gebogen, neêrwaarts gebogen of hol met opwaarts gebogen of bol en wederkeerig, continuïteit met discontinuïteit, gesloten beloop met open beloop, enz. enz., even alsof de oorspronkelijke kromme geheel ware omgebogen of omgekeerd, en gescheiden, zoo zij gesloten ware.

II.

De graad der æquatie eener omgekeerde kromme met opzigt tot die der oorspronkelijke (gesteld deze is algebraïsch, en dus ook de omgekeerde) kan zeer verschillend wezen. Meermalen is de omgekeerde van eene hoogere orde dan de oospronkelijke; maar het tegendeel kan evenzeer plaats vinden, en beide kromme lijnen kunnen wezen van denzelfden graad en tevens van dezelfde soort, zijnde dit laatste mogelijk voor kromme lijnen met asymptoten.

Wanneer de vergelijking van de oorspronkelijke kromme niet is ingewikkeld, en dat zij derhalve kan gebragt worden tot den vorm $y = f(x)$ of $(y + a)^n = f(x)$, zoo moet men onderscheiden de gevallen of $f(x)$ is eene geheele rationale, of eene irrationale, of eene gebrokene functie, welker teller, of noemer, of beide, wederom rationaal of irrationaal kunnen zijn. Is $f(x)$ geheel en rationaal en van den graad m, zoo is de graad der vergelijking van de tegenovergestelde kromme altijd hooger dan die der oorspronkelijke kromme lijn, en wel n of m graden hooger, naar gelang $n < m$ of $m < n$ is.

Komen er wortel-uitdrukkingen in $f(x)$ voor, zoo kan de graad der vergelijking tot den omgekeerden wortel y hooger wezen dan, maar ook gelijk aan dien der æquatie van de oorspronkelijke kromme.

Is $f(x)$ eene gebrokene functie, zoo is ligtelijk in te zien, dat, naar ge-

gelang x in den teller, tot eene hoogere, tot eene gelijke, of tot eene lagere magt dan in den noemer voorkomt, de vergelijking der omgekeerde kromme een graad zal hebben, hooger dan, gelijk aan, of lager dan de graad der oorspronkelijke kromme. Het is overigens duidelijk, dat, zoo eene tegenovergestelde of omgekeerde kromme van hoogere orde is, dan de oorspronkelijke, het tegendeel evenzeer kan plaats vinden. Want de omgekeerde als oorspronkelijke, en de oorspronkelijke als omgekeerde kromme beschouwende, zoo is deze van lager graad als de eerste van hoogere orde is.

De ingewikkelde functieën geven derhalve tot dezelfde verscheidenheid van gevallen aanleiding. Zoo behooren b. v. de vergelijkingen

$$xy^2 + ay = bx + c,$$
$$xy^2 + ay = b,$$

tot kromme lijnen van de derde orde, aangewezen door NEWTON in zijne *Enumeratio linearum tertii ordinis*. Van de eerste heeft de omgekeerde een gelijken graad, van de tweede is zij één graad lager. De vergelijking

$$y^2 + axy - p = 0$$

behoort tot eene hyperbola, welker beide takken de as van y, boven en onder den oorsprong, snijden, en welker middelpunt in den oorsprong ligt. De omgekeerde kromme is eveneens van den tweeden graad, en wel ook eene hyperbola, mede de as van y snijdende en het centrum in den oorsprong hebbende, maar de ligging der kromme lijn is tegenovergesteld, zoodat de regtsche tak linksche en de linksche regtsche is geworden.

Het is niet moeijelijk in te zien, wanneer de pas vermelde omstandigheid bij ingewikkelde functieën zal plaats vinden, en hoe men de voorwaarden tot het hooger of lager of gelijk zijn van den graad der æquatie, bij omkeering der ordinaten, naauwer kan begrenzen.

III.

De oorspronkelijke en hare omgekeerde kromme kunnen snijpunten of raakpunten gemeen hebben. Welke ook de abscissen dezer doorsnijdingspunten of raakpunten mogen wezen, de ordinaten y zijn bestendiglijk $= \pm 1$. De getallenwaarde 1 toch is de eenige, welke aan hare wederkeerige waarde gelijk is. Maar de vergelijkingen geven altijd ± 1, en dus minstens *twee* snijpunten. Want denkende de vergelijking der oorspronkelijke kromme (gesteld zij is algebraïsch) opgelost ten aanzien van y, zoo is

$$y = f(x),$$

en die der omgekeerde

$$\mathrm{y} = \frac{1}{f\,(x)},$$

nu is, voor de gemeenschappelijke punten, $\mathrm{y} = y$; eliminerende alzoo $f\,(x)$, zoo komt

$$y^2 = 1 \quad \text{en} \quad y = \pm 1.$$

Deze uitkomst is, als gevolg der eliminatie, altijd waar. Het kan nogtans wezen, dat alleenlijk $y = +1$ of $y = -1$ voor de kromme lijnen geldt, of ook dat geene dezer waarden toepasselijk is. Met andere woorden, het kan gebeuren, dat de kromme lijn door hare omgekeerde gesneden of geraakt wordt boven en beneden de abscissen-as, of alleenlijk boven, of alleenlijk onder die as, en het kan ook zijn, dat er geene snij- of raakpunten bestaan.

Dit wordt uitgewezen door de vergelijkingen $y = f\,(x)$ of $\mathrm{y} = \frac{1}{f\,(x)}$.

Want substituerende in dezelve $\mathrm{y} = y = +1$ of $= -1$, en lossende de komende æquatieën in x op, zoo bestaan er even zoo vele snij

 pun-

punten of raakpunten beneden de as van x of boven dezelve, als x verschillende of gelijke bestaanbare waarden erlangt (en wel uit elke vergelijking natuurlijk dezelfde waarden); terwijl alle die snij- of raakpunten, boven of beneden de as van x, gelegen zullen wezen in regte lijnen, op den afstand van ééne éénheid evenwijdig aan de as van x loopende. Heeft x geene bestaanbare waarden, zoo bestaan er ook geene snij- of raakpunten, hetgeen dus alleenlijk kan gebeuren, als de graad der æquatie even is.

Men leidt hieruit ook af, dat, zoo de vergelijkingen der kromme lijnen ingewikkeld zijn, en men uit dezelve x elimineert, de eindvergelijking in y altijd deelbaar zal wezen door $y^2 - 1$. Die eindvergelijking kan dus eene evene binomial-vergelijking zijn, — of eene evene wederkeerige vergelijking, in welke de middelste term ontbreekt, en van welke de teekens der termen afwisselen, — of eene evene wederkeerige en volledige vergelijking, van welke de termen, die even ver van het midden afstaan, gelijke teekens en coëfficienten hebben, en wel zoodanig, dat de sommen der coëfficienten van de evene en onevene magten van y, afzonderlijk genomen, gelijk nul zijn. Behalve de wortels $y = 1$ en $y = -1$ van de eindvergelijking zullen geene andere aan de oorspronkelijke vergelijking voldoen, zoo dat de waarden van x bestaanbaar worden.

De evene wederkeerige en de evene binomial-vergelijkingen zouden derhalve aangemerkt kunnen worden, als te ontstaan door het verband tusschen twee hoogere vergelijkingen met twee onbekenden, ééne van welke, in de eene vergelijking, waarden heeft, die het omgekeerde zijn van de waarden, aan deze onbekende in de tweede vergelijking toekomende, terwijl van de andere onbekende de waarden in beide de vergelijkingen dezelfde zijn (1).

IV

---

(1) De schrijver deelde de opmerkingen, welke het onderwerp dezer verhandeling uitmaken, aan de Eerste Klasse van het Instituut mede, om daardoor te voldoen aan zijne verpligting tot het vervullen eener spreekbeurt. Hij achtte deselve niet van die meerdere

IV.

Niet geheel onbelangrijk is het, de figuur en de veranderingen van gedaante en beloop der omgekeerde kromme lijnen, in eenige bepaalde gevallen, na te gaan. Daartoe dienen de navolgende voorbeelden.

1. De omgekeerde, welke behoort tot eene regte lijn $y = ax$, gerigt door den oorsprong der coördinaten, is eene gelijkzijdige hyperbola, heb-

---

wetenschappelijke waarde, dat zij eerder in de Verhandelingen dan wel in het Tijdschrift van het Instituut zouden mogen worden openbaar gemaakt, bijaldien zij voor den druk van eenig belang werden geacht. De klasse vereerde hem met de meening van het eerste, en stelde, tot bepaalde inlichting hieromtrent (en volgens den regel), zijn opstel in handen eener Commissie. Die Commissie adviseerde tot het opnemen van de onderwerpelijke beschouwingen in de werken der klasse, doch maakte, bij haar verslag, eene aanmerking, welke het al of niet snijden der oorspronkelijke kromme lijnen en der omgekeerde betrof. De schrijver erkent gaarne de juistheid van die aanmerking, en oordeelt het gepast, deselve, zonder verandering van den zin des teksts, in haar geheel hier bij te voegen. »Men vermeent namelijk, dat het al of niet snijden eener voorgestelde kromme door hare omgekeerde eeniglijk afhangt van de keuze der éénheid, welke bij de beschouwing der omgekeerde kromme lijnen altijd moet aangenomen worden. Eene der vergelijkingen, hetzij »van de oorspronkelijke, hetzij van de omgekeerde kromme, is toch altijd ongelijkslachtig, »en kan alzoo niet geconstrueerd worden, zonder het aannemen eener bepaalde lijn als »éénheid. Is die éénheid grooter dan de grootste ordinaat der oorspronkelijke, dan kan er »geene snijding plaats vinden, en in het tegengesteld geval heeft dit, in het algemeen, altijd »plaats. Hieruit volgt tevens, dat elke oorspronkelijke kromme, wier vergelijking gelijkslachtig is, eene oneindige verscheidenheid van omgekeerde heeft, dewijl men, voor elke »aangenomene éénheid, andere vormen van omgekeerde verkrijgt, die voor deselfde abscissen andere ordinaten hebben. Zijn de beide vergelijkingen, der oorspronkelijke en der »omgekeerde, ongelijkslachtig, dan moet voor beide deselfde éénheid gelden, en alsdan »heeft elke kromme ook slechts, bij onveranderde coördinaten-assen, eene enkele omgekeerde.''

hebbende den oorsprong tot middelpunt, en de coördinaten-assen tot asymptoten. De potentia is $= \frac{1}{a}$, en de halve assen zijn $= \sqrt{\frac{2}{a}}$. De positieve en negatieve abscissen der beide punten van doorsnijding der hyperbola en der regte lijn, zijn aan de potentia gelijk. Deze figuur verandert niet, wanneer de lijn niet door den oorsprong gaat; de hyperbola wordt slechts evenwijdig aan zich zelve verplaatst, en zal tot centrum hebben het punt van doorsnijding der lijn met de abscissen-as. Zoo evenwel de regte lijn evenwijdig loopt aan de as van x, of ook bijaldien de coördinaten zoodanig verplaatst worden, dat de lijn aan de veranderde abscissen-as parallel loopt, zal de omgekeerde eveneens eene evenwijdige aan de abscissen-as zijn. Loopt de lijn evenwijdig aan de as van y, zoo is de omgekeerde nog eene lijn, evenwijdig loopende aan de as van y, maar zij valt in met de oorspronkelijke lijn zelve.

2. Het omgekeerde oppervlak, behoorende tot een plat vlak, $z = a x + b y$, gerigt door den oorspreng der coördinaten, zal een hyperbolische cylinder wezen, welks beschrijvende lijn evenwijdig loopt aan het vlak $x y$. Ditzelfde coördinaten-vlak is een der asymptotische vlakken. Het andere asymptotisch vlak staat loodregt op het eerste, en snijdt hetzelve, volgens de lijn, gemeen aan het oorspronkelijke vlak en genoemd coördinaten-vlak. De snijdingen van het platte vlak en van het cylindervlak zijn beschrijvende lijnen van het laatste, en liggen op ééne eenheid afstands van het coördinaten-vlak $x y$.

3. Onder de kromme lijnen, welker vergelijkingen afhangen van cirkelvormige abscissen en regtlijnige convergerende ordinaten, orthogonaal gerigt door de abscissen, is de spiraal van ARCHIMEDES die, welker vergelijking, bij die soort van coördinaten, denzelfden vorm heeft als de vergelijking der regte lijn voor regtlijnige orthogonale coördinaten. Diezelfde overeenkomst bestaat dan ook bij de omgekeerde kromme lijnen;

nen; inderdaad, de omgekeerde archimedische (of *lineaire*) spiraal is eene gelijkzijdig hyperbolische spiraal.

4. Evenzoo is het gelegen met de kromme lijnen van velerlei kromming, die de namen dragen van *cylindrische* en *conische spiralen*. De eerste is de *schroeflijn*, op een regten cirkelvormigen *cylinder* getrokken; de tweede is de *schroeflijn*, getrokken op een regt cirkelvormig *kegelvlak*. De eerste snijdt alle de beschrijvende lijnen onder een standvastigen hoek, en de afstanden der snijpunten tot den omtrek der basis, zijn evenredig aan de bogen des omtreks van de basis, begrepen tusschen den oorsprong of het begin der schroeflijn, en de voetpunten der lijnen, op welke gezegde afstanden worden gemeten. Onder de eerste voorwaarde kan ook de kegelvormige schroeflijn bestaan, maar hare æquatie is alsdan exponentiaal, en zij is eerder eene kegelvormige logarithmische spiraal. Het is meer bepaaldelijk onder de tweede voorwaarde, dat de kromme lijn op den kegel is, hetgeen is de spiraal van ARCHIMEDES op een plat vlak. Op het cylindrisch en conisch oppervlak hebben de vergelijkingen dier spiralen denzelfden vorm als die der regte lijn en der archimedische spiraal, namelijk $z = a\varphi$, of $z = a\varphi \pm b$, in welke φ de cirkelvormige abscis, gerekend langs den omtrek der basis, en z de regtlijnige ordinaat, gerekend op de beschrijvende lijnen, uitdrukt. Gevolgelijk zullen de omgekeerde kromme lijnen hier wezen hyperbolische lijnen van velerlei kromming, welke men *cylindrische* en *conische hyperbolische spiralen* kan noemen.

De regte lijn heeft eene gelijkzijdige hyperbola tot omgekeerde. Beide op een regthoekig stuk papier geconstrueerd zijnde, en dit om een cylinder gewonden, zal de regte lijn in een gedeelte eener schroeflijn, de hyperbola in een gedeelte eener cylindrische hyperbolische spiraal overgaan.

De kegelvormige spiraal wordt, in het ontrolde oppervlak van den kegel, eene archimedische spiraal, of een gedeelte er van. Men verkrijgt

dus de kegelvormige hyperbolische spiraal op het kegelvlak, door, in het ontrolde oppervlak, de hyperbolische spiraal als omgekeerde der archimedische te construeren, en daarna den kegel wederom met het ontrolde vlak omwikkeld te denken (2).

5. Zij een cirkel, hebbende r tot radius en het centrum in den oorsprong

(2) Bij deze opmerkingen kan gevoegelijk eene andere plaats vinden, wel in geen regtstreeksch verband staande met het onderwerp van beschouwing, maar rakende de kromme lijn, welke is de projectie eener gewone *helix* of cylindrische schroeflijn, van welke in den tekst is gewaagd. Die projectie, genomen op een plat vlak, evenwijdig aan de as van den regten cirkelvormigen cylinder gerigt, is eene regelmatig voortloopende slangvormige lijn, hebbende eene transcendentale æquatie; sommigen noemen haar *sinusoïde*. Neemt men nu den hoek, onder welken de beschrijvende lijnen van den cylinder door den *helix* gesneden worden, gelijk aan 45°, dat is neemt men de grootte van den spoed der schroeflijn gelijk aan den omtrek der basis van den cylinder, zoo gaat de projectie der schroeflijn over in de kromme lijn, aan welke men den naam gegeven heeft van *verzelster der cycloïde* en daar de ontrolde helix is eene regte lijn, blijkt hieruit ook de wording der genoemde *verzelster* door de regte lijn.

Dezelfde projectie der schroeflijn, welker spoed aan den omtrek der cirkelvormige basis van den cylinder gelijk is, is ook eene *lijn der sinussen*, dat is, verschilt niet van deze transcendentale kromme, ingeval hare abscissen gelijk genomen worden aan de bogen, welker sinussen de ordinaten zijn. In het algemeenste geval toch bestaat deze gelijkheid niet volstrekteiijk maar betrekkelijk, zoodat de reden tusschen de abscissen en bogen standvastig is.

Nog is er eene bekende kromme lijn, welke, in een bijzonder geval, niet verschilt van de projectie eener *helix*. Deze kromme lijn ontstaat wanneer men een regten cirkelvormigen cylinder snijdt door een plat vlak, niet evenwijdig aan de basis gerigt, en daarna het oppervlak van den geknotten cylinder op een plat vlak ontwikkelt; de elliptische snijding gaat, bij die ontwikkeling, over in eene slangvormige kromme, welke is de zoogenaamde *getransformeerde* der op het ontwikkelbare oppervlak bestaande ellips. Wanneer nu de elliptische snijding gemaakt is door een vlak, hellende onder een hoek van 45° op het vlak der basis van den cylinder, zoo zal de getransformeerde, of de ontrolde elliptische doorsnede, mede niet verschillen van de projectie eener helix, getrokken op denzelfden cylinder, en hebbende, als boven, een spoed, gelijk aan den omtrek der basis.

sprong der coördinaten. Deze heeft eene omgekeerde kromme, bestaande uit twee gelijke en gelijkvormige takken, ongeveer den vorm eener *quadratrix* of van een tak der *secanten-lijn* hebbende, en, aan wederzijde van de abscissen-as, zich tot in het oneindige op- en neêrwaarts uitstrekkende. Deze kromme is eene hyperbolische kromme; hare asymptoten zijn de onbepaalde raaklijnen des cirkels, gaande door de uiteinden der middellijn, welke op de abscissen-as ligt.

Bijaldien r is > 1 zal de cirkel, met zijne tegenovergestelde kromme, twee paren van tegenovergestelde snijpunten hebben. Naar mate r grooter is, naderen de toppen der beide takken meer tot de as van x, maar de bogten der kromme, bij die toppen, worden platter, en naderen meer het regtlijnig beloop. Is $r = 1$, zoo vallen de beide snijpunten van elk paar zamen in de uiteinden der middellijn, welke op de as y ligt, aldaar bevinden zich dan ook de toppen der beide takken, en er heeft aanraking van den cirkel en der omgekeerde kromme plaats. Is $r < 1$, zoo bestaan er geene snijpunten. Voor r zeer klein, liggen de beide toppen, en dus ook de takken, op zeer grooten afstand van den oorsprong; de kromming der bogten wordt kleiner en kleiner, en $= 0$ als $r = 0$ is; maar alsdan gaat de cirkel over in een punt, en de omgekeerde kromme in een paar van tegenovergestelde punten, op oneindigen afstand van het centrale punt gelegen.

6. Wanneer de standvastige grootheden, in de vergelijking eener kromme lijn voorkomende, niet veranderen, of tot elkander dezelfde reden behouden, verandert ook de figuur of het beloop der kromme lijn niet, al is het dat de rigting en plaats der coördinaten-assen veranderd wordt. Eene omgekeerde kromme, op zich zelve beschouwd, verandert dus ook niet van gedaante, wanneer hare punten tot andere of veranderde coördinaten-assen gerekend worden. Doch beschouwt men de omgekeerde kromme met betrekking tot de oorspronkelijke kromme lijn, zoo is het, ten aanzien van haar beloop, niet om het even, tot welke assen de pun-

ten der oorspronkelijke kromme lijn gerekend worden. Want eene van die assen is de grondlijn ter bepaling van de waarde der ordinaten van de omgekeerde kromme, en het is geenszins onverschillig hoe zij is gerigt. Voor eene regte lijn verandert, met eene andere stelling der coördinaten-assen (mits geene derzelve evenwijdig aan de regte lijn zij), wel de afmeting, maar niet de soort der omgekeerde kromme. Voor een cirkel veranderen noch grootte noch soort der omgekeerde kromme, hoedanig ook de regthoekige assen mogen gerigt zijn, mits de oorsprong in het centrum ligge. Doch men denke eene ellips; neemt men eene der hoofdmiddellijnen als abscissen-as, zoo verkrijgt de omgekeerde kromme een symmetrisch beloop ten opzigte van de ordinaten-as; neemt men echter eenige willekeurige middellijn der ellips als abscissen-as, zoo verkrijgt de omgekeerde kromme een geheel onsymmetrisch beloop.

Bij andere kromme lijnen heeft het merkbaar en zelfs groot verschil van figuur reeds plaats bij de verwisseling der coördinaten-assen. De lemniscata van BERNOUILLI geeft er een voorbeeld van; neemt men als as van x de lijn, gaande door de beide deelen van den strik, en wel door de zoogenaamde brandpunten van de lemniscata, zoo bestaat de omgekeerde kromme uit twee paren van tegenovergestelde takken; elk dezer takken is *open* maar *onsymmetrisch* ten opzigte eener lijn, gaande door den top en evenwijdig aan de as van y. Neemt men daarentegen de as van y als as der omgekeerde kromme, zoo bestaat deze uit twee tegenovergestelde *gesloten* deelen, welke, op een oneindigen afstand, in een punt eindigen, en den vorm van zeer spitse eironden hebben, *symmetrisch* zijnde ten opzigte der as van de lemniscata.

Nog een ander merkwaardig voorbeeld der verandering van figuur eener omgekeerde kromme, door gelijktijdige verandering van de coördinaten en van een der parameters, heeft men bij den cirkel. Boven is reeds opgemerkt, dat de bedoelde figuur niet verandert, zoo lang de oorsprong der coördinaten in het centrum van den cirkel blijft. Doch men plaatse dit middelpunt op de as van y, boven den oorsprong en a éénhe-

heden van denzelven verwijderd, zoo is de æquatie van den cirkel

$$(y - a)^2 + x^2 = r^2.$$

De omgekeerde kromme is van de vierde orde even als wanneer het middelpunt in den oorsprong ligt, maar hare vergelijking is nu

$$y = \frac{1}{a \pm \sqrt{(r^2 - x^2)}}.$$

Naar gelang men $a < = $ of $> r$ neemt, zal de cirkel door de as van x gesneden, geraakt of niet gesneden worden.

Zoo a is $< r$, zullen de beide takken der omgekeerde kromme niet gelijk en gelijkvormig wezen; het zal kunnen gebeuren, dat de cirkel wel door den bovensten maar niet door den ondersten tak gesneden, of ook door dezen slechts geraakt wordt. Hetzelfde zal ook met den bovensten tak kunnen plaats vinden. Deze zal, in het algemeen, zoodanig beloop verkrijgen, dat hij, na, in twee punten, van buiging te zijn veranderd, tot asymptoten heeft de loodlijnen op de as van x, getrokken door de snijpunten dezer as met den cirkel, en tot raaklijnen de evenwijdige raaklijnen van den cirkel, mede loodregt door de as van x gaande. De asymptoten van den ondersten tak zijn de verlengde asymptoten van den bovensten, maar die onderste tak ligt geheel en al tusschen de asymptoten.

Zoo a is $= r$, vervalt de onderste tak. De as van y is nu de enkele asymptoot der beide oneindig ver oploopende beenen van den bovensten tak; deze tak zal twee buigpunten hebben, en, even als in andere gevallen, den cirkel kunnen snijden, raken of niet.

Zoo a is $> r$, bestaat de omgekeerde kromme ook slechts uit één deel, maar aangezien nu y nergens gelijk *nul* is, strekt de omgekeerde kromme zich nu niet meer tot in het oneindige uit. Zij zal eene geslotene kromme lijn wezen, eivormig van gedaante, en van zoodanig onafgebroken beloop, dat er geen singulier punt bestaat; zij zal twee toppen heb-

hebben, van welke de raaklijnen evenwijdig aan de as van x zullen loopen.

En zoo kan men, ten aanzien der omgekeerde kromme lijnen van den cirkel, bij andere plaatsing van den coördinaten-oorsprong, — en in grootere verscheidenheid nog ten aanzien der omgekeerde van andere kromme lijnen, — zeer vele andere wijzigingen en overgangen van figuren opmerken, welke men eenigzins bij de *anamorphosen* in de optica of perspectief zou kunnen vergelijken of met deze in verband brengen.

7. De omgekeerde der Appollonische parabola zal eene cubische hyperbola wezen, en zulks in beide gevallen, hetzij men de as der parabola aanneemt als abscissen-as, hetzij men daartoe kiest de raaklijn aan den top der parabola. In het eerste geval zullen het positieve deel dezer as, en de geheele onbepaalde as der ordinaten, asymptoten der hyperbola zijn. In het tweede geval is de geheele as van x eene asymptoot, en het positieve deel der as van y de tweede asymptoot.

Even zoo wordt de omgekeerde eener gewone hyperbola eene hyperbolische kromme van de vierde orde, uit twee paren van hyperbolische takken, bestaande, welke de as van x tot gemeenschappelijke asymptoot zullen hebben.

8. Behalve de voorbeelden der omgekeerde van transcendentale kromme lijnen, boven reeds bijgebragt, zouden ook in aanmerking kunnen komen die der kromme lijnen, welke zijn de lijnen der sinussen, der cosinussen en der tangenten, hebbende tot omgekeerde de mede bekende kromme lijnen van de cosecanten, secanten en cotangenten.

Een ander voorbeeld heeft men bij de elliptische functieën van de eerste en tweede soort. Neemt men geene polaire, maar regthoekige coördinaten, — geeft men aan x alle waarden, van af *nul* tot $\frac{1}{2}\pi$, — en construeert men (c een getal < 1 zijnde) de kromme lijnen, welker ordinaten, voor dezelfde waarde van x, tot uitdrukking hebben

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2 \sin.^2 x)}} \quad \text{en} \quad y = \sqrt{(1-c^2 \sin.^2 x)},$$

zoo zullen de getallenwaarden der vlakte-ruimten, begrensd door deze kromme lijnen, door de assen van x en y, en door eenige ordinaat, welke tot de abscis x behoort, de getallenwaarden zijn der elliptische functieën van de beide eerste soorten, tusschen de grenzen x en 0. De eerste dezer kromme lijnen zal opwaarts, de tweede neêrwaarts gebogen zijn; zij hebben in de as y één punt gemeen, éénе eenheid van den oorsprong afstaande; — zij kunnen ook, voor grootere waarden van x dan $\frac{1}{2}\pi$, gedacht worden zich verder uit te strekken, en uit eene aaneenschakeling van eindige takken te bestaan, op afstanden $= \frac{1}{2}\pi$ door keerpunten of uitspringende punten vereenigd, zoodanig dat, voor elke kromme in het bijzonder, deze takken gelijk en gelijkvormig zijn, maar beurtelings tegenovergesteld.

Eindelijk verdient nog opmerking het voorbeeld der logarithmische lijn. Men kan hare æquatie voorstellen door $y = Log.\ x$; die der omkeerde logarithmica zal wezen

$$y = \frac{1}{Log.\ x}.$$

Zij behoort tot eene kromme lijn, welke, even als de beide pas aangewezene, merkwaardig is door de transcendentale integraal-functie, tot welke zij betrekking heeft. Die functie is namelijk de zoogenaamde *integraal-logarithmus*, even als de elliptische functieën, eene bijzondere transcendente uitmakende.

De kromme lijn bestaat uit twee takken van zeer verschillend beloop. Zij begint in den oorsprong, — heeft aldaar een zoogenaamd stuit- of standpunt, — gaat van $x = 0$ tot $x = 1$ door een buigpunt neêrwaarts tot in het oneindige, — bij $x = 1$ wordt de continuïteit afgebroken, en voorbij $x = 1$ bestaat, opwaarts, eene soort van hyperbolischen tak, welke de as x tot éénе asymptoot heeft. De logarithmica gaat door beide deze takken, snijdt dezelve in twee punten, welker abscissen tot ge-

getallenwaarden hebben, die der basis e en van de wederkeerige basis $\frac{1}{e}$ van het neperiaansche logarithmen-stelsel.

V.

De omgekeerde kromme lijnen worden gemakkelijk geconstrueerd, wanneer de oorspronkelijke getrokken zijn. Want zoo y en y de overeenkomstige ordinaten van de oorspronkelijke en van de omgekeerde kromme zijn, heeft men $y : 1 = 1 : \mathrm{y}$. De ordinaten y worden derhalve gevonden door eene derde evenredige te construeren, hetgeen, op zekere uitgestrektheid, door een zamenstel van linialen, dat is door regelbeweging, zou kunnen geschieden, als bediende men zich van eene soort van pantographe. Doch sierlijker constructie kan men voorschrijven door het gebruik eener gelijkzijdige hyperbola. Want $y\mathrm{y} = 1$ zijnde, en eene gelijkzijdige hyperbola geconstrueerd hebbende, welker potentia $= 1$ is, zoo behoeft men slechts evenwijdige lijnen te trekken, snijdende van de hyperbola en van de oorspronkelijke kromme gelijke ordinaten af, alsdan zullen de abscissen van de respectieve punten der hyperbola, de omgekeerde ordinaten zijn van de overeenkomstige punten der oorspronkelijke kromme lijn; en deze abscissen, door cirkelbogen, overbrengende op de ordinatenlijnen van laatstgenoemde punten, zoo verkrijgt men die der omgekeerde kromme.

VI.

Onder de gevolgen, die uit de betrekking tusschen de ordinaten der oorspronkelijke en der omgekeerde kromme lijnen voortvloeijen, kan men ook deze tellen.

De

De punten, welke, in beide kromme lijnen, tot even groote abscissen behooren, hebben ook even groote *subtangenten*, maar derzelver rigtingen zijn tegengesteld, zoodat de constructie der tangenten van de omgekeerde onmiddellijk verkregen wordt door die der tangenten van de oorspronkelijke, en wel op eene wijze, die, op den tegengestelden zin na, dezelfde is als de manier om, met behulp der raaklijnen van een cirkel, de raaklijnen tot eene ellips te trekken; want een cirkel om of in eene ellips beschreven zijnde, zoo hebben de overeenkomstige punten van beide deze kromme lijnen (dat is de punten tot dezelfde abscis behoorende), dezelfde subtangens.

De hoeken, tusschen de abscissen-as en de overeenstemmende raaklijnen der beide kromme lijnen, hebben eene bepaalde betrekking tot elkander, zoodanig dat de verhouding der trigonometrische tangenten van deze hoeken (zonder op positieven of negatieven toestand te letten) dezelfde is als de verhouding der vierkanten van twee ordinaten, van welke de eene is de ordinaat 1, gemeen voor beide kromme lijnen, zoo zij elkander snijden, terwijl de andere is de ordinaat van het raakpunt der omgekeerde kromme met de raaklijn, welke men beschouwt. Men kan de verhouding ook omkeeren, en zeggen: de tangens van den hoek, tusschen de abscissen-as en de raaklijn van een punt der omgekeerde kromme, verhoudt zich tot de tangens van den hoek, tusschen de abscissen-as en de raaklijn van het overeenkomstige punt der oorspronkelijke kromme lijn, gelijk het vierkant der ordinaat van het raakpunt der oorspronkelijke kromme, tot het vierkant der éénheid van de maat der ordinaten. Snijden de kromme lijnen elkander niet, zoo gaat niettemin deze evenredigheid, gelijk ook de eerstgenoemde, door.

Uithoofde van deze bepaalde rigting der raaklijnen van de overeenkomstige punten der oorspronkelijke en der omgekeerde kromme lijnen, bestaat er ook zeker verband tusschen de poollijnen van beide. Echter is dit verband, in het algemeen, veranderlijk van de eene kromme tot de andere. Van sommige kromme lijnen, die, voor zeker punt als pool, eene

regte lijn tot poollijn hebben, kan de poollijn van het overeenkomstige punt der omgekeerde kromme mede eene regte lijn wezen; doch meer algemeen is zij eene hyperbolische lijn van hoogere orde.

Er bestaat ook eene betrekking tusschen de subnormalen, welke voor alle overeenkomstige punten der oorspronkelijke en omgekeerde kromme lijnen dezelfde is. Deze betrekking is die der vierkanten van de trigonometrische tangenten der hoeken tusschen de abscissen-as en de raaklijnen, dat is die der vierde magten van de getallenwaarden der bovengenoemde ordinaten, te weten der ordinaat 1, en der ordinaat van het punt der omgekeerde kromme, welks subnormaal gedacht of gezocht wordt, of ook der ordinaat van het overeenkomstige punt der oorspronkelijke kromme, en der ordinaat 1.

Dit alles geldt voor orthogonale coördinaten. Voor polaire coördinaten verhoudt zich de subtangens der oorspronkelijke tot de subtangens der omgekeerde kromme, als de éénheid tot het vierkant van den voerstraal van het overeenkomstige punt der omgekeerde kromme, en deze is ook tevens de betrekking tusschen de subnormalen, welke, even als de subtangenten, gedacht worden op de lijn, gaande door de pool, en loodregt op den voerstraal gerigt zijnde.

De betrekking tusschen de lengten van bogen voor dezelfde grenzen van abscissen, en de betrekking tusschen de kromtestralen van overeenkomstige punten, kan ook in algemeene formulen worden uitgedrukt, maar zij zijn niet eenvoudig, en doen geen merkwaardig verband kennen.

De algemeene uitdrukkingen voor de inhouden tusschen bepaalde grenzen van abscissen, zijn klaarblijkelijk gelijkvormig aan de uitdrukkingen der ordinaten. Voor de eene kromme is alzoo de inhoud gelijk aan de integraal uit de wederkeerige functie, welke voor den inhoud der andere kromme lijn moet geïntegreerd worden. Doch hierbij bepaalt zich dan ook het algemeen verband ten aanzien der inhouden. Alleenlijk zou men kunnen opmerken, dat, zoo de inhoud eener kromme lijn, tusschen bepaalde grenzen van abscissen genomen, niet bepaald wordt door

in-

integratie, maar door de approximatie-manier, die men de *methode der quadraturen* noemt, de omgekeerde kromme lijnen eene graphische oplossing geven van het problema, om, gegeven zijnde eene reeks van getallen, die elkander, met geringe verschillen, volgens eene bepaalde wet, en zonder afbreking, opvolgen, en aannemende dat de som van de termen dier reeks bekend zij, alsdan de som der wederkeerige waarden van die termen te vinden of meetkundig voor te stellen.

VII.

De beschouwing der omgekeerde kromme lijnen of der omgekeerde oppervlakken kan somtijds als middel tot verklaring en verduidelijking van andere beschouwingen, en ook als hulpmiddel van onderzoek, van eene wezentlijke nuttigheid zijn.

Zoo kan men, met behulp eener omgekeerde kromme, op eene zeer eenvoudige wijze aantoonen, het verband, dat bestaat tusschen de beide hoofdeigenschappen der elliptische functieën van de eerste en tweede soort, namelijk: dat voor de eerste, met behulp eener eenvoudige vergelijking, kan gevonden worden eene functie, gelijk aan de som of aan het verschil van twee gelijksoortige functieën, maar dat zulks voor de tweede (en evenmin voor eene zoogenaamde functie van de derde soort), met dezelfde elementen of argumenten, niet doorgaat.

Zoo dient, bij de beschouwing der vroeger genoemde transcendentale functie, die men integraal-logarithmus noemt, de constructie der omgekeerde logarithmica, om een meer volkomen denkbeeld te geven van de bijzondere waardijen, welke deze functie achtervolgens verkrijgt of kan verkrijgen, bij aangroeijing der integraal-grens, of wel zij dient om de

beteekenis dier waarden, zoo als men ze in eene berekende tafel opgegeven ziet, te verklaren.

En zoo zou ook het eene en andere, dat in deze hoofdzakelijke opmerkingen is aangestipt, somtijds kunnen aangewend worden als hulpmiddel van onderzoek, om, — inzonderheid wanneer het den loop en de eigenschappen van kromme lijnen en gebogene oppervlakken geldt, — beschouwingen te vereenvoudigen. Van de omstandigheid b. v. dat omgekeerde kromme lijnen en gebogene oppervlakken van eene lagere orde kunnen zijn dan de oorspronkelijke, kan gebruik gemaakt worden, om, door de kennis van den loop of der wording eener lijn of oppervlakte van lagere orde, die eener andere van hoogere orde gemakkelijk na te gaan.

De vergelijkingen, boven (sub II) bijgebragt, kunnen tot voorbeelden hiervan verstrekken. De eerste dier vergelijkingen was:

$$xy^2 + ay - bx - c = 0;$$

bij verwisseling der coördinaten heeft men:

$$yx^2 + ax - by - c = 0,$$

en deze behoort tot eene kromme van de derde orde, van welke de omgekeerde een graad lager, namelijk eene kegelsnede is, door welke derhalve de loop der oorspronkelijke kromme gemakkelijk kan worden nagegaan. Met de tweede der genoemde vergelijkingen is dit eveneens het geval; zij is die eener kromme lijn, welker omgekeerde eene gewone parabola is. Dit lager worden van den graad der omgekeerde kromme vindt inzonderheid plaats bij het ontbreken van termen, dat is bij het onvolledig zijn der vergelijkingen van gegevene kromme lijnen, en men zou dus somtijds, door geschikte transformatie van coördinaten, uit de vergelijking eener kromme lijn zoodanige termen kunnen doen wegvallen, door welke de æquatie der omgekeerde kromme van een lager graad werde.

Ten aanzien van oppervlakken geldt hetzelfde. Ware b. v. voorgesteld het onderzoek des beloops eener gebogene oppervlakte van den der-

derden graad, hebbende tot aequatie $xyz = a$, dan zou men zich daartoe van de omgebogene oppervlakte kunnen bedienen; want noemende ξ de wederkeerige getallenwaarde der ordinaat z, dan zou de vergelijking dier oppervlakte wezen $a\xi = xy$. Deze is de vergelijking eener hyperbolische paraboloïde; daarom kan het gevraagde beloop aangemerkt worden oorsprong te nemen uit dat van een regelvlak, zullende in hetzelve alle die snijdingen hyperbolisch wezen, welke in het regelvlak regtlijnig zijn, enz.

Leiden, April 1845.

BIJDRAGE

TOT DE

TOEPASSING VAN HET BEGINSEL VAN D'ALEMBERT,

OVEREENKOMSTIG DE

REKENWIJZE VAN LAGRANGE,

DOOR

Gideon
G. J. VERDAM.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1864.

BIJDRAGE

TOT DE

TOEPASSING VAN HET BEGINSEL VAN D'ALEMBERT,

OVEREENKOMSTIG DE

REKENWIJZE VAN LAGRANGE,

DOOR

Gideon Jan

G. J. VERDAM.

Uitgegeven door de Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.



AMSTERDAM,

C. G. VAN DER POST.

1864.

BIJDRAGE

TOT DE

TOEPASSING VAN HET BEGINSEL VAN D'ALEMBERT,

OVEREENKOMSTIG DE

REKENWIJZE VAN LAGRANGE.

DOOR

G. J. VERDAM.



De belangrijke leerstelling der Dynamica, bekend onder de benaming van het *grondbeginsel van* D'ALEMBERT of het *algemeen beginsel van* D'ALEMBERT, in verband gebragt met en uitgedrukt door het *beginsel der virtuele snelheden*, geeft eene betrekking, uit welke, naar een onveranderlijken regel, kunnen afgeleid worden de noodige vergelijkingen, ter ontbinding van elk voorstel aangaande de beweging, en de omstandigheden der beweging hetzij van een enkel stoffelijk punt, hetzij van eene groep van stoffelijke punten, die op eenige wijze verbonden zijn of gezamenlijk eenig geheel, — derhalve ook eene massa van zamenhangende stofdeelen, een ligchaam, of vereenigde ligchamen, — uitmaken. En zulks voor elk geval, in elke vooronderstelling, zoowel bij het vrijelijk kunnen bewogen worden van dat punt of van deze groep vereenigde punten, als indien de beweging niet geheel vrij is, maar dat verandering van plaats slechts op bepaalde wijze, slechts voorwaardelijk kan geschieden. Klaarblijkelijk moeten daartoe gegeven zijn *én* deze voorwaarden *én* de krachten, die op de punten werken en de beweging veroorzaken of ook wijzigen, terwijl, in het geval eener groep van vereenigde

punten, de bepaalde wijze van onveranderlijk of veranderlijk verbonden zijn tot de voorwaarden behoort.

LAGRANGE leerde ons het meer uitgestrekt gebruik van het *beginsel der virtuele snelheden*. Ook het toepassen der leerstelling van D'ALEMBERT door middel van dit beginsel is men aan hem verschuldigd. Hij gaf een eenvoudig voorschrift, een onveranderlijken regel, of liever eene wijze van doen of te werk gaan, eene methode, bestaande in eene eenvormige rekenwijze om, uit eene algemeene vergelijking of formule, op het beginsel der virtuele snelheden gegrond, en van het wezen van dit beginsel de analytische uitdrukking zijnde, alles af te leiden wat doel van eenig onderzoek of van eenige beschouwing in de *Statica* kan zijn. Maar dat voorschrift kan dan ook onveranderd gevolgd worden bij het zamennemen of verbinden van dit beginsel met dat van D'ALEMBERT, ten einde dit laatste toe te passen ter ontbinding van eenig voorstel der *Dynamica*. De rekenwijze voert alsdan niet alleenlijk regtstreeks tot de differentiaal-vergelijkingen der beweging, maar zij doet bovendien bekend worden alle omstandigheden, die van de werking der krachten en van de beweging, zoo als deze plaats heeft, een gevolg zijn. Derhalve leert zij de bijzonderheden, die men zou kunnen verlangen te weten, of die men in eenig geval zou moeten nagaan, ten aanzien van drukking, spanning, wederstand, tegenwerking, als anderzins, uitgeoefend, veroorzaakt of teweeggebragt door de werkende krachten, door de traagheid der stof, door belemmeringen of beletsels, door voorwaardelijk verband, door gedwongene verplaatsing, enz. En dan geeft zij ook het juiste oordeel over krachten, welke in de plaats van die wederstanden en voorwaarden zouden kunnen gedacht worden, ten einde, zoo zij met de gegevene krachten zamenwerkten op de groep van punten, deze te kunnen beschouwen als eene groep van geheel vrije punten zonder eenig verband. De eenvoudige en eenvormige wijze, waarop dit alles in eene zelfde berekening of ontwikkeling kan bepaald worden, werd door LAGRANGE zelven aangemerkt als bij uitnemendheid aan zijne methode eigen te zijn, gelijk een bijzonder voordeel, verbonden aan haar gebruik.

De weg, dien men volgt bij het te werk gaan naar dit voorschrift, is zeker, doet niet falen. Alhoewel gemakkelijk en niet lang, is hij evenwel niet altijd de kortste. Men kan dan ook, bij het toepassen van het beginsel van D'ALEMBERT, wel afwijken van den regel van LAGRANGE, wel nalaten om zijne rekenwijze in eenig opzigt te volgen, waar zij minder gepast of minder kort mogt zijn of mogt schijnen. Maar het afwijken heeft dikwijls geen vol-

doenden grond; het gedeeltelijk volgen kan doen twijfelen omtrent het algemeen zijn van de methode; het kan de meening doen ontstaan, dat hetgeen men zoekt, naar het loutere voorschrift niet regtstreeks of niet in allen deele zou kunnen gevonden worden.

In de werken van voorname wiskundigen, in geschriften, bestemd om als leiddraad voor de ordelijke beoefening der Dynamica te verstrekken, trof mij meermalen eene onregelmatigheid, onbestendigheid of onvolledigheid in dat opzigt of in dien zin. Zelfs bij de behandeling van eenvoudige voorstellen wordt de rekenwijze van LAGRANGE niet altijd vollediglijk toegepast, en van haar gebruik, ter oplossing van minder eenvoudige vraagstukken, wordt niet gewaagd, alsof zij daartoe niet zou kunnen althans niet zou moeten gevolgd worden. Het *niet moeten* kon grond hebben in het somtijds minder korte. Het *niet kunnen* mogt niet worden vooronderstelt, of zou slechts schijn wezen. Het *niet gewagen* kon te eerder bevreemden, omdat het nuttige en leerzame, dat het volgen der rekenwijze van LAGRANGE aanbiedt, niet in twijfel getrokken zal worden.

De opmerking van dit een en ander gaf mij eene stof ter ontwikkeling, namelijk het *overeenkomstig de methode van* LAGRANGE toepassen van het beginsel van D'ALEMBERT, ter ontbinding van de twee in de Dynamica zeer gewigtige voorstellen, aangaande de *beweging van een vast ligchaam hetzij om eene vaste as, hetzij om een vast punt,* in de vooronderstelling dat het ligchaam op onveranderlijke wijze met die as of met dit punt is verbonden.

Met *toepassen ter ontbinding* wordt hier bedoeld het door die toepassing verkrijgen of vormen van de differentiaal-vergelijkingen der beweging, en het bepalen der functiën, die het oordeel geven over den wederstand, welken de as of het vaste punt moet kunnen bieden aan hetgeen door de bewegende krachten wordt uitgewerkt en door de beweging wordt veroorzaakt. Meer geeft de toepassing van het beginsel van D'ALEMBERT niet, en meer kan het niet geven. In de wijze van toepassen echter, in het middel om van het beginsel te komen tot die vergelijkingen en functiën, kan onderscheid bestaan; daarin kunnen de oplossingen der genoemde voorstellen ook verschillen. In geene der mij bekende oplossingen is daartoe eeniglijk en doorgaand gebruik gemaakt van de rekenwijze van LAGRANGE. Intusschen is de oplossing naar deze methode niet onbelangrijk. Welligt kan zij, met betrekking tot kortheid, geen voorrang hebben. Maar LAGRANGE gaf zijne methode ook

niet als een regel ter bekorting van de berekeningen. Moge zij dan geene kortere zijn, zij zal nogthans in andere opzigten vergelijking kunnen doorstaan.

---

§ I.

BEWEGING VAN EEN VAST LIGCHAAM OM EEN VASTE AS.

---

1. Zij eene vaste massa van bepaalde grootte en gedaante. Men kenne de plaats van hare punten of elementen door hunne coördinaten x, y, z of afstanden tot drie regthoekig op elkander gerigte en onbewegelijke coördinatenvlakken. Is m de grootte der massa, dan zal ∂m aanduiden de grootte van elk harer elementen of differentiaal-deelen. Is verder, voor de eenheid der massa, P de grootte eener beweegkracht, dan zal, voor de massa m, de overeenkomstige beweegkracht zijn Pm, en zij zal, voor het element ∂m, $P\partial m$ wezen. Onderscheidene zoodanige krachten kunnen op een zelfde element ∂m werken. Deze krachten kunnen ook andere grootte hebben voor andere en andere elementen, en men kan in het algemeen aannemen, dat P afhangt van eene functie der coördinaten van het element waarop de kracht $P\partial m$ werkt. Bij het gegeven zijn der krachten kent men zoowel rigting als grootte.

Elke der krachten op een zelfde element kan gedacht worden ontbonden te zijn evenwijdiglijk aan de coördinaten-assen. In de plaats van al de bij ontbinding verkregen krachten, welker rigtingen aan eene zelfde coördinaten-as evenwijdig zijn, kan, bij zamenstelling, eene enkele kracht gesteld worden, het geval namelijk uitsluitende dat deze zamenstelling een koppel zou opleveren. Op deze wijze zullen dan de krachten, op eenig element ∂m werkende, herleid zijn tot drie krachten, evenwijdig aan de coördinaten-assen gerigt, en ten aanzien van grootte aangeduid kunnende worden door $X\partial m$, $Y\partial m$, $Z\partial m$. Tot elk element behooren dergelijke krachten. Zijn nu de elementen niet vrij, dan zal er, volgens het beginsel van D'ALEMBERT, *door het gegeven verband der elementen, en door de voorwaardelijke wijze van*

hunne verplaatsing of beweging, evenwigt bestaan tusschen al deze beweegkrachten en andere, gelijk en regtstreeks tegenovergesteld aan de beweegkrachten,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m,$$

die op de elementen zouden moeten werken, om aan deze, zoo zij geheel vrij waren, dezelfde beweging te geven die zij, bij het vereenigd zijn en aan voorwaarden van verplaatsing onderworpen, werkelijk hebben of ontvangen. Dienvolgens moet, door het beginsel der virtuele snelheden,

$$\Sigma\left\{X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta x+\Sigma\left\{Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta y+\Sigma\left\{Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta z=0$$

zijn. Bijaldien de elementen onmiddellijk en overal onafgebroken aan elkander sluiten, zoodat het geheel of vereenigde als één massa, — deze moge vast zijn of niet, — kan aangemerkt worden, dan gaan de uitgedrukte sommen over in integralen, betrekking hebbende tot de geheele massa, dat is uitgestrekt over de geheele massa, en men zal moeten hebben:

$$\int\left\{X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta x+\int\left\{Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta y+\int\left\{Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\delta z=0,$$

of

$$\int\left\{\left[X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right]\delta x+\left[Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right]\delta y+\int\left[Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right]\delta z\right\}=0. \quad (1)$$

In deze vergelijking, — welke is de *onbepaalde vergelijking der virtuele momenten*, — zijn $\delta x, \delta y, \delta z$ de variatiën der coördinaten van de elementen der massa, — zij zijn symbolen der virtuele snelheden of der virtuele verplaatsingen van de elementen, — en de vergelijking is dán alleenlijk waar, indien men het verband of de betrekkingen in aanmerking neemt, tusschen deze variatiën moetende bestaan als de elementen niet volkomen vrij zijn, dat is zoo zij zijn verbonden en in wijze van beweging, als anderzins, door voorwaarden bepaald.

2. De behandeling der vergelijkingen (1) komt derhalve hierop neder, dat men vergelijkingen of functiën van de onbepaalde coördinaten x, y, z (onbepaald namelijk in het geval eener massa, welker elementen overal op dezelfde wijze aan elkander sluiten of zamenhangen, en dat er geene bijzondere of bepaalde punten zijn, waarop andere of bijzondere krachten werken, of ten opzigte van welke punten bijzondere voorwaarden moeten worden ver-

vuld) vorme, die de uitdrukkingen zijn van al de te vervullen voorwaarden, — deze voorwaardes-vergelijkingen variëre, — en met deze gevariëerde voorwaardes-vergelijkingen, of *voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten*, uit de vergelijking (1) zoo vele variatiën eliminere als er voorwaardes-vergelijkingen zijn gegeven, kunnende het aantal van deze laatste nimmer overtreffen dat der onbepaalde of dat der onbepaalde en der bepaalde coördinaten. Op deze wijze komt men tot eene vergelijking, onafhankelijk van eenige voorwaarde; zij is de vergelijking der virtuele momenten bij welke al de voorwaarden zijn in rekening gebragt; derhalve de *bepaalde*, ofschoon vervormde, vergelijking der virtuele momenten. Zijn al de variatiën geëlimineerd, dan is deze verkregene vergelijking (zoo noodig, herleid zijnde) de eenige maar ook slechts de ééne noodzakelijke vergelijking der beweging. Zijn al de variatiën niet geëlimineerd, dan zijn de nog bestaande of overgeblevene onderling onafhankelijk en geheel onbepaald. En aangezien nu aan de vergelijking voldaan moet worden, onafhankelijk van elke variatie der coördinaten, zal de som van alle termen, die eene zelfde variatie tot factor hebben, aan *nul* gelijk gesteld moeten worden. Er komen op deze wijze zoovele afzonderlijke vergelijkingen als er variatiën, in de bepaalde vergelijking der virtuele momenten, waren overgebleven, en deze zullen zijn of, bij herleiding, opleveren de vergelijkingen der beweging.

3. Het regtstreeksch elimineren der variatiën δx, δy, δz ... uit de vergelijking (1) kan ingewikkelde berekeningen vereischen en moeijelijkheid veroorzaken. In de plaats hiervan stelde LAGRANGE eene rekenwijze, door hem genoemd *méthode des multiplicateurs*. Gelijk bekend is bestaat zij hierin, dat elke voorwaardes-vergelijking der variatiën, den vorm $\delta L = 0$ hebbende, met een onderscheiden doch onbepaalden factor λ vermenigvuldigd, gevoegd worde (door optelling) bij de onbepaalde vergelijking der virtuele momenten, en dat daarna de sommen der termen, die eene zelfde variatie tot factor hebben, aan *nul* gelijk worden gesteld. Alsdan uit de komende vergelijkingen de onbepaalde factoren λ wederom verdrijvende, zal men de begeerde differentiaal-vergelijkingen der beweging verkrijgen.

Heeft de vergelijking der virtuele momenten betrekking tot de elementen eener massa, bestaat zij derhalve uit sommen van uitdrukkingen of uit eene som van integralen, of is zij eene integraal, en zijn bovendien de vergelijkingen $\delta L = 0$ onbepaalde voorwaardes-vergelijkingen, dan moeten bij de vergelijking (1) niet gevoegd worden termen van den vorm $\lambda \delta L = 0$,

maar sommen of integralen van soortgelijke termen, hetgeen nederkomt op het bijvoegen van termen $\lambda \delta L$ *onder het integraal-teeken.* Het aan *nul* gelijk stellen van sommen van termen, die met eene zelfde variatie worden vermenigvuldigd, heeft derhalve betrekking tot termen onder het integraal-teeken. Waren sommige vergelijkingen $\delta L = 0$ bepaald, hadden zij tot een enkel bepaald punt of tot enkele bijzondere punten der massa betrekking, dan zouden de overeenkomstige termen $\lambda \delta L$ moeten worden bijgevoegd *buiten het integraal-teeken.* Zoodanige termen buiten het integraal-teeken kunnen ook uit onbepaalde voorwaardes-vergelijkingen ontstaan, indien deze namelijk geen betrekkingen zijn tusschen variatiën van coördinaten, maar van differentialen der coördinaten. Want in dit geval moeten de termen $\lambda \delta L$, onder het integraal-teeken aanwezig, worden ontwikkeld, dat is, door het integreren bij gedeelten, afhankelijk worden gemaakt van *loutere* variatiën der coördinaten, zoodat er dan ook termen, vermenigvuldigd met variatiën en met differentialen van variatiën, buiten het integraal-teeken zullen treden. De regel van het aan *nul* gelijkstellen van de sommen der termen, die eene zelfde variatie tot factor hebben, zal dan eveneens moeten toegepast worden op de termen buiten het integraal-teeken. De vergelijkingen, welke hierdoor worden verkregen, moeten eensdeels dienen ter bepaling van de grenswaarden der ingevoerde onbepaalde vermenigvuldigers λ, anderdeels ter bepaling van standvastige grootheden, dewijl het kan gebeuren dat, voor het bovengenoemd elimineren dezer factoren λ, het integreren van vergelijkingen moet voorgaan.

4. De differentiaal-vergelijkingen der beweging zijn gevormd uit vergelijkingen, die van de factoren λ afhangen. Heeft men de differentiaal-vergelijkingen kunnen oplossen, dan zal men ook de uitdrukkingen van waarde der ingevoerde factoren λ kunnen vinden Deze geven, naar de beschouwingen van LAGRANGE, het middel om de grootte van uitgeoefende drukkingen, van gebodene wederstanden, als anderzins, te leeren kennen. Zijn b. v. x_1, y_1, z_1 de coördinaten van een element of van een stoffelijk punt, dat bewogen wordt, of waarop zekere krachten vermogen uitoefenen, of dat wederstand biedt, — moet ten opzigte van dit punt eene voorwaarde, uitgedrukt door eene functie $L_1 = 0$ der coördinaten x_1, y_1, z_1, worden vervuld, — en is door de zoo even aangeduide vergelijkingen bevonden, dat λ_1 is de waarde van den factor, waarmede $\delta L_1 = 0$ was vermenigvuldigd, dan zal de grootte der drukking, botsing, spanning enz., geleden op of ter plaatse van

dat punt, en voor zoo verre dit een gevolg is van of onmiddellijk in verband staat met de voorwaarde $L_1 = 0$, bepaald worden door de uitdrukking

$$\pm \lambda_1 \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial z_1}\right)^2\right\}} = \pm \lambda_1 U_1, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

moetende het onderste teeken genomen worden, als de gevondene waarde of uitdrukking der waarde λ_1 is negatief. Zijn andere voorwaardes-vergelijkingen $L_2 = 0$, $L_3 = 0$ enz. mede van dezelfde coördinaten x_1, y_1, z_1, gelijk van andere, afhankelijk, dan moeten ook met deze, doch alleenlijk met betrekking tot hetzelfde genoemde punt, de overeenkomstige uitdrukkingen $\lambda_2 U_2$, $\lambda_3 U_3 \ldots$ worden opgemaakt, en deze zullen eveneens de grootte leeren van de drukking, op dit punt uitgeoefend, of van de belemmering, ter plaatse van het punt bestaande, ten gevolge van het voldaan zijn aan de voorwaarden $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, enz. En kent men zoo de onderscheidene drukkingen of wederstanden voor een zelfde punt, of de vele dergelijke uitwerkingen voor verschillende punten van eene lijn, van een oppervlak enz., dan blijft nog overig het herleiden van deze alle tot één enkele of tot een kleinst aantal, om tot het juiste oordeel te komen over hetgeen eigenlijk wordt uitgewerkt of teweeggebragt. Deze herleiding geschiedt naar geen bijzonder voorschrift, dat is naar geen voorschrift, door de rekenwijze gegeven, of uitsluitend, gelijk een eigen deel, tot de rekenwijze behoorende; zij wordt op de gewone wijze volbragt door de regels voor het zamenstellen van krachten en van koppels.

Maar voor deze herleiding is het noodig, dat men de rigting kenne, in welke drukking geleden of wederstand geboden wordt. Daartoe zij opgemerkt, dat de producten $\lambda \delta L$, in de vergelijking der virtuele momenten opgenomen, zelve den vorm hebben van een virtueel moment. Zij moeten er ook de voorstelling van zijn, opdat deze vergelijking den zin behoude, dien zij uitsluitend en eeniglijk moet hebben. Aangezien nu

$$\lambda \delta L = (\lambda U)\frac{\delta L}{U} = (\lambda U) \cdot \frac{1}{U}\left\{\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z\right\}$$

$$= (\lambda U)\frac{\frac{\partial L}{\partial x}}{U}\delta x + (\lambda U)\frac{\frac{\partial L}{\partial y}}{U}\delta y + (\lambda U)\frac{\frac{\partial L}{\partial z}}{U}\delta z$$

is, blijkt hieruit, dat $\lambda \delta L$ inderdaad komt in de plaats van de som der zamenstellende virtuele momenten eener kracht of eener uitwerking (λU), uit-

geoefend op het punt, welks coördinaten zijn x, y, z, en daar ter plaatse in eene rigting, normaal tegen een oppervlak, hebbende $L = f(x, y, z) = 0$ tot vergelijking. Dit oppervlak kan gedacht worden de voorwaarde $L = 0$ te vervangen. Het bepaalt de gedwongene beweging van het punt. De baan, door het punt beschreven, of waarin het punt wordt bewogen, moet op dit oppervlak zijn. Door het teeken van U kent men de streek der normale rigting, waarin het gedachte oppervlak of de baan van het punt (als ware zij eene stoffelijke baan) wederstand biedt, en de regtstreeks tegenovergestelde streek bepaalt de rigting, waarin de drukking, als anderzins, op het punt wordt uitgeoefend.

De herinnering aan de hoofdpunten der rekenwijze van Lagrange is hier voorgegaan, ten einde te vermijden dat, bij het ontbinden der voorstellen over de beweging van een ligchaam om eene as of om een punt, de redeneringen of berekeningen hier en daar zouden moeten worden afgebroken, om de te volgen of toe te passen deelen der rekenwijze te noemen en meer of minder in eenige bijzonderheden te verklaren.

5. Om de vergelijking der virtuele momenten te doen dienen, ter bepaling van de beweging en van de omstandigheden der beweging van een vast ligchaam om eene as, welke in de ruimte niet van plaats verandert en ook met het ligchaam onveranderlijk vereenigd is, merke men op, dat voor elk element der vaste massa *drie* voorwaarden moeten worden vervuld. *Vooreerst* heeft de beweging van elk element om de as in een cirkel plaats; elk element heeft derhalve of behoudt voortdurend een onveranderlijken afstand tot de as. *Ten tweeden* blijft elk element in een vlak, — het vlak van zijne cirkelvormige baan, — dat loodregt op de as is gerigt, of liever, indien door eenig punt van de as een vlak gedacht wordt, loodregt op de as gerigt, dan behoudt elk element ook voortdurend een onveranderlijken afstand tot dit vlak. *Ten derden* is de massa of het ligchaam *vast*, dat is de elementen sluiten niet alleen onafgebroken aan elkander, zij hangen niet alleenlijk zamen, maar zij kunnen ook niet gerekt, ingedrukt noch om elkander gebogen worden; zij moeten derhalve onderling onveranderlijk van plaats zijn; zij moeten ten opzigte van elkander dezelfde afstanden behouden. De elementen van een volkomen hard ligchaam verkeeren dienvolgens in dit geval. Niettemin is de beschouwing ook toepasselijk op een week of veerkrachtig ligchaam, zoo lang of zoo dikwijls, hetzij door de werking der krachten, hetzij ten

gevolge der beweging, geen de minste verandering in de onderlinge afstanden der elementen wordt veroorzaakt. Dit onveranderlijk zijn der afstanden tusschen de elementen is voor een gedeelte reeds in de twee eerste voorwaarden; hetgeen nog aan het volstrektelijk onveranderlijk zijn ontbreekt, is dat elk element, in het vlak zijner beweging om de as, dezelfde plaats behoudt ten opzigte van de overige in dit zelfde vlak gelegene elementen *.

Eenig punt der as van omwenteling worde als oorsprong der coördinaten van de elementen der massa aangenomen. De as zelve zij die der ordinaten z, waardoor dan tevens de stelling van het vlak der coördinaten x en y bepaald is. Is nu de afstand van eenig element tot de as van omwenteling $= r$, en de afstand van hetzelfde element tot het coördinaten-vlak $xy, = \zeta$, dan zullen, volgens de twee eerstgenoemde voorwaarden, r en ζ voor een zelfde element standvastig moeten zijn gedurende de beweging. De voorwaardes-vergelijkingen, door welke dit wordt uitgedrukt, zullen dienvolgens zijn:

* Deze Bijdrage, aan de Koninklijke Akademie van Wetenschappen aangeboden, was door Haar gesteld in handen van de Heeren LOBATTO en STAMKART, Leden der Akademie, ten einde over den inhoud verslag en oordeel uit te brengen. De verslagen dezer Heeren beoordeelaars behelsden ook eenige opmerkingen, welke aan den schrijver zijn medegedeeld geworden, opdat hij daarvan zoodanig gebruik zou kunnen maken als hem gepast zou voorkomen. Voor zoo ver dit niet geschied is om voorstelling, beschouwing of behandeling van enkele punten in de Bijdrage eenigzins te wijzigen, oordeelde de schrijver het voegzaam van de voornaamste der aanmerkingen en opmerkingen melding te maken, ter plaatse waar het behoort of waartoe zij betrekking hebben.

Ten opzigte van de hier in den tekst genoemde voorwaarden is door den Heer STAMKART aangemerkt, „dat de derde voorwaarde, *door welke zou worden uitgedrukt dat elk element, in het* „*vlak zijner beweging om de as, dezelfde plaats behoudt ten opzigte van de overige* „*in dit zelfde vlak gelegene elementen*, niet geheel voldoende scheen te zijn, want zouden „daarbij de verschillende vlakken met hunne elementen niet nog afzonderlijk om de as kun„nen draaijen?"

Indien men zich die vlakken afzonderlijk, op of tegen elkander geplaatst, wilde voorstellen, en er eene oneindig kleine tot *nul* naderende dikte aan toekennen, zouden toch de elementen in eenig vlak met die van het, aan de eene of andere zijde, daar tegen aansluitende in aanraking zijn. De in aanraking zijnde deelen of punten der elementen in het eene vlak en in het andere zouden dezelfde ordinaten z hebben. De vergelijking, welke het onveranderlijk geplaatst zijn dezer deelen in het eene vlak uitdrukt, zal dan ook gelden voor de overeenkomstige aansluitende deelen der elementen in het andere. Dienvolgens moeten deze deelen in het tweede vlak, en dan ook de elementen in dit vlak, onderling dezelfde plaatsen behouden als de overeenkomstige deelen en elementen in het eerste vlak, en dezelfde vergelijking, welke dit voor het eene der vlakken uitdrukt, sluit op deze wijze het onderling zamenhangen der beide vlakken in. Geen nieuwe voorwaardes-vergelijking is noodig; zij zou overtollig wezen en onbepaaldheid doen ontstaan.

$$L_1 = x^2 + y^2 - r^2 = 0, \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$L_2 = z - \zeta = 0. \dots\dots\dots\dots (4)$$

Hieruit de voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten

$$\delta L_1 = 2x\,\delta x + 2y\,\delta y = 0, \dots\dots\dots\dots (5)$$

$$\delta L_2 = \delta z = 0. \dots\dots\dots\dots (6)$$

De derde voorwaarde zal daardoor kunnen worden uitgedrukt, dat, terwijl de differentiaal-afstand ∂s van elke twee onmiddellijk aan elkander grenzende elementen, hebbende x, y, z en $x + \partial x$, $y + \partial y$, z tot coördinaten, standvastig blijft, de afstand van het tweede dezer elementen tot de as, even zoo als die van het eerste, geen verandering ondergaat of kan ondergaan. Derhalve moet de variatie van

$$(x + \partial x)^2 + (y + \partial y)^2$$

nul zijn, dat is

$$2\,(x + \partial x)\,(\delta x + \delta\partial x) + 2\,(y + \partial y)\,(\delta y + \delta\partial y) = 0.$$

Hieruit, na ontwikkeling, en op $\delta\partial x = \partial\delta x$, $\delta\partial y = \partial\delta y$ lettende,

$$2\,(x\,\delta x + y\,\delta y) + 2\partial\,(x\,\delta x + y\,\delta y) + 2\,(\partial x\,\partial\,\delta x + \partial y\,\partial\,\delta y) = 0.$$

Maar $x\,\delta x + y\,\delta y$, volgens (5), $= 0$ zijnde, is ook $\partial\,(x\,\delta x + y\,\delta y) = 0$; derhalve komt deze derde voorwaardes-vergelijking der variatiën van de coördinaten

$$\delta L_3 = 2\,\partial x\partial\delta x + 2\,\partial y\partial\delta y = 0, \dots\dots\dots\dots (7)$$

welke ook onmiddellijk zou hebben kunnen zijn afgeleid geworden uit $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 =$ *standvastig*, in aanmerking nemende, dat z standvastig of $\delta z = 0$ is *.

De voorste leden der vergelijkingen (5), (6), (7), elk met een onderscheiden doch onbepaalden factor λ_1, λ_2, λ_3 vermenigvuldigd, en de producten over de geheele massa genomen zijnde, moeten de vergelijkingen, daaruit ontstaan, opgeteld worden bij de onbepaalde vergelijking der virtuele momenten. De bij te voegen vergelijkingen zijn derhalve:

$$\int 2\,\lambda_1\,(x\,\delta x + y\,\delta y) = 0,\quad \int \lambda_2\,\delta z = 0,\quad \int 2\,\lambda_3\,(\partial x\partial\delta x + \partial y\partial\delta y) = 0$$

Maar de laatste worde eerst, door integreren bij gedeelten, herleid, zoodat

* Zie de aanteekening, aan het einde dezer Bijdrage.

de termen onder het integraal-teeken eeniglijk van loutere variatiën der coördinaten afhangen. Daartoe aannemende, dat λ''_3, λ'_3, $\partial x''$, $\partial x'$, $\partial y''$, $\partial y'$, $\delta x''$, $\delta x'$, $\delta y''$, $\delta y'$, zijn de waarden van λ_3, ∂x, ∂y, δx, δy aan de twee grenzen (einde en begin) der integraal, zal die laatste vergelijking overgaan in

$$0 = -\int 2\delta x \partial(\lambda_3 \partial x) - \int 2\delta y \partial(\lambda_3 \partial y) + 2(\lambda_3'' \partial x'')\delta x'' + 2(\lambda''_3 \partial y'')\delta y'' - 2(\lambda'_3 \partial x')\delta x' - 2(\lambda'_3 \partial y')\delta y'.$$

Ofschoon het standvastig zijn der ordinaat z van eenig element, en het daarom *nul* zijn van hare variatie, vrijheid geeft om den derden term in het voorste lid der algemeene vergelijking (1) van de virtuele momenten te doen wegvallen, indien het alleenlijk te doen is om de differentiaal-vergelijking der draaijende beweging van de massa te hebben, zal die derde term nog behouden worden, omdat hij later, ter bepaling van eene der uitgeoefende drukkingen, dienen moet. Nogtans kan, zonder dat de algemeenheid der berekening worde verminderd, het tweede gedeelte van genoemden term, dat is $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, worden opgeheven; want de zamenstellende snelheid $\frac{\partial z}{\partial t}$, evenwijdig aan de as, is klaarblijkelijk *nul*, en daarom ook de versnelling $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0$. Het optellen van de drie nu verkregene vergelijkingen bij de onbepaalde vergelijking (1) der virtuele momenten, zal, na de termen, die met eene zelfde variatie vermenigvuldigd worden, te hebben vereenigd, deze bepaalde vergelijking der virtuele momenten (eeniglijk nu op het geval der beweging eener vaste massa om eene vaste as toepasselijk zijnde) geven:

$$\int\left\{\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m + 2\lambda_1 x - 2\partial(\lambda_2 \partial x)\right\}\delta x +$$
$$\int\left\{\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m + 2\lambda_1 y - 2\partial(\lambda_2 \partial y)\right\}\delta y + \int\left\{Z\partial m + \lambda_2\right\}\delta z$$
$$+ 2(\lambda''_3 \partial x'')\delta x'' + 2(\lambda''_3 \partial y'')\delta y'' - 2(\lambda'_3 \partial x')\delta x' - 2(\lambda'_3 \partial y')\delta y' = 0 \quad . \; . \; . \; (8)$$

In deze vergelijking zijn geen limieten van integralen aangeduid; zij moeten niettemin als bepaalde integralen worden beschouwd, als integralen over de geheele massa uitgestrekt, dat is tusschen de grenzen der massa genomen. De uitgedrukte variatiën, zoowel die in de termen *buiten* als die in de termen *onder* de integraalteekens, zijn thans als onderling onafhankelijke variatiën aan te merken. Derhalve wordt, overeenkomstig den regel, aan de vergelijking (8) voldaan door te stellen

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) \partial m + 2 \lambda_1 x - 2 \partial (\lambda_2 \partial x) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) \partial m + 2 \lambda_1 y - 2 \partial (\lambda_2 \partial y) = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$Z \partial m + \lambda_2 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\lambda''_2 \partial x'' = 0, \quad \lambda''_2 \partial y'' = 0, \quad \lambda'_2 \partial x' = 0, \quad \lambda'_2 \partial y' = 0. \ldots\ldots (12)$$

De onbepaalde factor λ_1 komt alleenlijk voor in de vergelijkingen **(9)** en **(10)**, en in geen van beide is de onbepaalde factor λ_2. Daarom is de vergelijking **(11)**, waarin deze laatste vermenigvuldiger de eenige is, onnoodig ter behandeling van de twee eerstgenoemde, uit welke eene differentiaal-vergelijking moet kunnen afgeleid worden, die bevrijd zal zijn van λ_1 en λ_2 om de differentiaal-vergelijking der beweging te kunnen wezen. Vooreerst den factor λ_1 regtstreeks eliminerende, komt:

$$\left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) y \partial m - \left(Y - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) x \partial m + 2 \{x \partial (\lambda_2 \partial y) - y \partial (\lambda_2 \partial x)\} = 0,$$

van welke vergelijking de onbepaalde integraal is

$$\int \left\{ \left(\frac{x \partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{y \partial^2 x}{\partial t^2} \right) \partial m - (x Y \partial m - y X \partial m) \right\} + 2 \lambda_2 (x \partial y - y \partial x) = C. \ldots\ldots (a)$$

Uit de vergelijkingen **(12)** volgt, dat de waarde van λ_2 aan de limieten der integraal *nul* is. Neemt men wijders de gewone vooronderstelling aan, dat aan de eene der limieten de integraal verdwijnt, dan wordt $C = 0$, en de voorgaande vergelijking, uitgestrekt zijnde over de geheele massa, zal deze bepaalde uitkomst geven:

$$\int \left(x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) \partial m = \int (x Y \partial m - y X \partial m). \ldots\ldots\ldots (13)$$

Deze is de bekende vergelijking der draaijende beweging eener vaste massa om eene onbewegelijke as, indien op de elementen dezer massa voortdurend krachten werken die, ontbonden zijnde in drie regthoekige rigtingen, van welke eene is evenwijdig aan de as, $X \partial m$ en $Y \partial m$ tot sommen van zamenstellende elementaire krachten, evenwijdig aan de beide andere rigtingen (met de as regte hoeken makende), zullen opleveren.

6. Daar de hoeksnelheid der draaijende beweging eene voorname grootheid is, welke men op eenig oogenblik der beweging moet kunnen weten, wordt

het eerste lid der vergelijking (13) gemeenlijk tot een anderen vorm herleid, zoodat het de hoek versnelling leert kennen, en dan verder, na het ten tweeden male integreren, de hoeksnelheid zelve. Deze herleiding kan op meer dan één wijze geschieden. Is b. v. ω de hoeksnelheid op eenig oogenblik, dan heeft een element der massa, op den afstand r $(r^2 = x^2 + y^2)$ van de as geplaatst of gelegen, de snelheid $r\omega$ in zijne cirkelvormige baan, waaruit, door ontbinding, de zamenstellende snelheden, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y,

$$\frac{\partial y}{\partial t} = + x\omega, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = - y\omega,$$

en dan

$$x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t} = (x^2 + y^2)\omega = r^2\omega.$$

Gevolgelijk, wegens het, voor een zelfde element, standvastig zijn van r,

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = r^2\frac{\partial\omega}{\partial t},$$

waarmede het voorste lid der vergelijking (13) overgaat in

$$\int \frac{\partial\omega}{\partial t} r^2\,\partial m, \quad \text{dat is in} \quad \frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m,$$

omdat de integraal betrekking heeft tot al de elementen der massa, die, als onveranderlijk zamenhangende, ook alle op een zelfde oogenblik dezelfde hoekversnelling $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ hebben. Dienvolgens komt de formule

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m = \int (x\,\mathrm{Y}\,\partial m - y\,\mathrm{X}\,\partial m), \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

zijnde de bekende vergelijking, door welke de hoekversnelling $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ wordt bepaald, waarmede dan verder de hoeksnelheid ω in functie van t zal kunnen gevonden worden.

7. Klaarblijkelijk moet de vergelijking der beweging ook verkregen worden, door het regtstreeksch elimineren van zoo vele variatiën uit de vergelijking der virtuele momenten, als er voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten gegeven zijn. Beschouwt men z als standvastig, $\delta z = 0$, en den derden term uit de vergelijking der virtuele momenten afwezig, zoodat zij eenvoudiglijk is

$$\int\left\{\left(X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right)\delta x+\left(Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)\delta y\right\}=0,$$

dan zijn er twee voorwaardes-vergelijkingen,

$$x\,\delta x+y\,\delta y=0 \quad \text{en} \quad \partial x\,\partial\,\delta x+\partial y\,\partial\,\delta y=0,$$

derhalve zoo vele vergelijkingen als variatiën. Van deze de uitdrukkingen der waarden uit de voorwaardes-vergelijkingen bepalende, en alsdan, na substitutie dezer waarden van δx en δy in de vergelijking der virtuele momenten, de uitdrukking onder het integraal-teeken aan *nul* gelijk stellende, zal de differentiaal-vergelijking der beweging moeten komen, of liever, men zal, eeniglijk door die substitutie, de uitgedrukte integraal van deze vergelijking hebben.

Om δx en δy uit de twee voorwaardes-vergelijkingen op te lossen, differentiëre men de eerste dezer vergelijkingen, en eliminere daarna δx en $\partial\,\delta x$ door middel van de beide voorwaardes-vergelijkingen, dan komt

$$(x\,\partial y-y\,\partial x)\frac{\delta y}{x}-(x\,\partial y-y\,\partial x)\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}=0,$$

dat is

$$\frac{\partial\delta y}{\delta y}=\frac{\partial x}{x}.$$

Bijgevolg

$$\delta y=C\,x,$$

en dan

$$\delta x=-\frac{y}{x}\delta y=-C\,y.$$

Hiermede gaat de vergelijking der virtuele momenten over in

$$\int\left\{-\left(X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right)C\,y+\left(Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)C\,x\right\}=0,$$

welke, den standvastigen factor C opheffende, na eenvoudige verschikking van termen juist de boven gevondene vergelijking (13) zal opleveren.

8. Zoo er geen krachten onafgebroken op de elementen der massa werken, maar dat het ligchaam is in beweging gebragt door de onherhaalde botsing eener kracht, of ook door een koppel van krachten, dat slechts een enkel oogenblik heeft gewerkt, zal, gelijk bekend is, de draaijende beweging

eenparig zijn. De vergelijking (14) leert dit ook; want $X\partial m$ en $Y\partial m$ *nul* zijnde, wordt deze vergelijking

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m = 0,$$

aan welke alleenlijk kan worden voldaan door $\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0$ te stellen, waardoor ω standvastig wordt. Nog zou men tot deze zelfde uitkomst zijn gekomen, door het voorstel voor het thans gestelde bijzondere geval evenzoo op te lossen als voor het geval der meer algemeene vooronderstelling. Daartoe moet men dan deze vergelijking der virtuele momenten behandelen

$$\int\left\{-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\,\delta x - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\,\delta y - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\,\delta z\right\} = 0.$$

Zij zal voeren, bij het eveneens te werk gaan als boven, tot dit stel van vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\lambda_1 x - 2\partial(\lambda_3\,\partial x) = 0,\\ -\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\lambda_1 y - 2\partial(\lambda_3\,\partial y) = 0,\\ \lambda_2 = 0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

En deze geven, door gelijkvormige berekening als in art. 5,

$$\int\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) = 0,$$

of

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m = 0.$$

Alhoewel deze zelfde uitkomst, als welke de vergelijking (14) onmiddellijk geeft, te voorzien was, en daartoe dan ook het aanduiden der vergelijking van de virtuele momenten voor dit bijzonder geval, zoo mede dat der vergelijkingen, die er uit verkregen worden, geenszins noodig was, is dit nogtans niet nagelaten, omdat in een der volgende artikels op de vergelijkingen (15) wordt teruggekomen.

Leert evenwel deze berekening, even zoo als de algemeene vergelijking (14), dat ω standvastig is indien er geen krachten staande de beweging werkzaam blijven, zij leert ook niets meer. Noch zij, noch de vergelijking (14),

doen de grootte van deze onveranderlijke hoeksnelheid kennen. Zij is die, welke bij den aanvang der beweging op eens of plotseling is medegedeeld door eene kracht, die slechts een oogenblik gewerkt heeft. Door deze andere vooronderstelling is de aard van het voorstel gewijzigd, en om het onbekende te vinden, moet worden uitgegaan van eene vergelijking der virtuele momenten, uitsluitend op deze bijzondere vooronderstelling gegrond.

Hoedanig ook de beweging aan de massa zij medegedeeld, hetzij door de werking eener enkele kracht of van een enkel koppel, hetzij door gelijktijdige werking van meer krachten of koppels, hetzij door aanbotsing als anderzins, altijd zal de uitwerking kunnen worden teruggebragt tot die, welke plaats heeft in het geval eener mededeeling van de beweging door eene enkele kracht. Zij P de grootte van zoodanige kracht, welke door botsing, schok of stoot, of door eene ontwikkelde hoeveelheid beweging, veroorzaakt heeft, dat de massa m om de vaste as draait. Klaarblijkelijk moet daartoe de rigting der kracht niet door de as gaan, er moet afstand zijn tusschen de rigtingen der as en der beweegkracht. Zij ook aangenomen, dat de kracht hebbe gewerkt op of tegen een bepaald en bekend punt der massa (of althans in eene rigting, gaande door zoodanig punt), alsmede dat het vlak, gaande door dit punt loodregt op de as, zij het vlak der coördinaten x, y van de elementen der massa. De geheele massa, dat is al de elementen ∂m gezamenlijk, door de kracht P in beweging gebragt zijnde, kan men, alhoewel deze kracht slechts op of tegen een enkel punt van het ligchaam haar vermogen heeft uitgeoefend, aannemen, dat deze werking over al de elementen verdeeld was. De kracht P bijv. ontbonden zijnde in hare drie zamenstellende X, Y, Z, evenwijdig gerigt aan de coördinaten-assen, kan elke dezer, in evenwijdige rigtingen, gedacht worden gelijkelijk verdeeld of ontbonden te zijn over alle elementen der massa, zoodat dan op elk element, en evenwijdig aan de coördinaten-assen, drie krachten werken, die door ∂X, ∂Y, ∂Z kunnen worden aangeduid.

Er zijn nu geen versnellende krachten; er worden hoeveelheden beweging medegedeeld, en deze moeten derhalve uitgedrukt worden door producten van massa en snelheid. De snelheid van beweging van eenig element, hebbende x, y, z tot coördinaten, evenwijdig aan de coördinaten-assen ontbonden zijnde, zullen de zamenstellende snelheden worden uitgedrukt door

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Daarom zal nu de vergelijking der virtuele momenten deze moeten zijn:

$$\int\left\{\left(\partial X - \partial m . \frac{\partial x}{\partial t}\right)\delta x + \left(\partial Y - \partial m . \frac{\partial y}{\partial t}\right)\delta y + \left(\partial Z - \partial m . \frac{\partial z}{\partial t}\right)\delta z\right\} = 0.$$

Verbindende met deze, op dezelfde wijze als welke in art. 5 gevolgd is, de voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten

$$2x\delta x + 2y\delta y = 0 \quad \text{en} \quad 2\partial x\partial\delta x + 2\partial y\partial\delta y = 0,$$

dan komt men tot deze vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} &\partial X - \frac{\partial x}{\partial t}\partial m + 2\lambda_1 x - 2\partial(\lambda_2 \partial x) = 0, \\ &\partial Y - \frac{\partial y}{\partial t}\partial m + 2\lambda_1 y - 2\partial(\lambda_2 \partial y) = 0, \\ &\partial Z + \lambda_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

En hieruit, even zoo als de vergelijking (13) is verkregen,

$$\int\left(x\frac{\partial y}{\partial t} - y\frac{\partial x}{\partial t}\right)\partial m = \int(x\partial Y - y\partial X).$$

Is ω de hoeksnelheid, in het enkel oogenblik der werking van de kracht P aan de massa medegedeeld, dan zal altijd

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y, \quad \text{en} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x$$

zijn, en de integraal in het eerste lid der voorgaande vergelijking alleenlijk betrekking hebbende tot de massa, zal deze vergelijking overgaan in

$$\omega\int r^2\partial m = \int(x\partial Y - y\partial X) = \int x\partial Y - \int y\partial X.$$

De integralen in het laatste lid zijn eigenlijk sommen van momenten, die, naar de aangenomene vooronderstelling, gelijk moeten zijn aan de momenten der onverdeelde zamenstellende krachten X en Y. Zoo derhalve, in het coördinaten-vlak xy, a en b zijn de coördinaten van het punt, waarop de kracht P heeft gewerkt, zal $\int x\partial Y = aY$ en $\int y\partial X = bX$ zijn, en daarom

$$\omega\int r^2\partial m = Ya - Xb \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

In deze vergelijking is het tweede lid een verschil van twee momenten.

In de plaats van dit verschil kan gesteld worden het moment der kracht $Q = \sqrt{(X^2 + Y^2)}$. Is derhalve p de lengte der loodlijn, uit den oorsprong der coördinaten op de rigting der kracht Q getrokken (welke lengte p niet onderscheiden is van den afstand tusschen de rigtingen van de vaste as en der kracht P), dan is Qp de grootte van het moment der kracht Q; het is ook het moment der kracht P, voor zoo veel zij draaijende beweging mededeelt of kan mededeelen. En hiermede wordt de laatste vergelijking vervangen door

$$\omega \int r^2 \partial m = Qp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Deze is de vergelijking der beweging van een vast ligchaam om eene vaste as, bijaldien geen krachten op dit ligchaam werken of blijven werken, nadat het op een oogenblik is in beweging gebragt door eene kracht, hebbende een vermogen Q, of door welke eene hoeveelheid beweging, aangeduid door Q, kan worden ontwikkeld of medegedeeld. De vergelijking geeft de bekende uitdrukking voor de grootte der medegedeelde hoeksnelheid ω, waarmede het ligchaam zal blijven draaijen, zoo lang de beweging niet wordt belemmerd, hetzij door vreemde krachten, hetzij door eenigen wederstand.

9. Laat nu worden overgegaan tot het bepalen der grootte van de drukkingen, zoo bij de beweging, als ten gevolge van de werking der krachten, uitgeoefend op de elementen der massa, en dan ook geleden wordende door de as, die aan deze uitwerking wederstand moet bieden.

Ofschoon, naar de orde van het tot hiertoe behandelde, eerst zou moeten gelet worden op het algemeen geval der veranderlijke beweging, teweeggebragt door een voortdurend werken van krachten op de elementen der massa, worde nogtans eerstelijk en afzonderlijk overwogen hetgeen er, ten aanzien van drukking of schok, wordt uitgewerkt, zoowel bij of onder de eenparige draaijende beweging eener massa, als op het oogenblik dat deze beweging door eenige kracht aan haar wordt medegedeeld.

Bij de eenparige beweging der trage massa wordt, ten gevolge der beweging zelve, drukking of spanning uitgeoefend op de elementen, en van deze op de as. Deze drukking moet bepaald worden door den factor λ_1 uit de vergelijkingen (15), welke geven

$$\lambda_1 = \frac{1}{2x}\left\{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\,\partial(\lambda_3\,\partial x)\right\} = \frac{1}{2y}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\partial(\lambda_3\,\partial y)\right\}.$$

Maar (zie boven)

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y \quad \text{en} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x,$$

derhalve

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega^2 x \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \omega\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega^2 y,$$

en dan

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2x}\{\omega^2 x\partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial x)\} = -\frac{1}{2y}\{\omega^2 y\partial m - 2\partial(\lambda^3 \partial y)\}.$$

Deze waarde van λ_1 heeft slechts betrekking tot een enkel element ∂m, dat met onmiddellijk aangrenzende elementen zamenhangt. Met betrekking tot zoodanig element zal de uitgeoefende of geledene drukking, naar aanleiding van de algemeene formule (2), bekend worden door

$$\pm\lambda_1 U_1 = \pm\lambda_1 \sqrt{\left\{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2\right\}},$$

dat is, uithoofde van $L_1 = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ (3), en verder lettende op het teeken van U_1 overeenkomstig het teeken der uitdrukking voor λ_1,

$$\lambda_1 U_1 = \lambda_1 \sqrt{\{(2x)^2 + (2y)^2\}} = \lambda_1 \sqrt{4(x^2+y^2)} = 2\lambda_1 r$$

$$= \frac{r}{x}\{\omega^2 x\partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial x)\} = \frac{r}{y}\{\omega^2 y\partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial y)\}.$$

Deze drukking wordt uitgeoefend in eene normale rigting tegen de baan, door het element ∂m in de beweging gevolgd. En vermits deze baan is een cirkel, loodregt op de as van omwenteling gerigt en in deze as zijn middelpunt hebbende, zal de drukking uitgeoefend worden op het element in de rigting van den straal, van de as af naar het element. In deze zelfde rigting wordt dan de as gedrukt of getrokken, en in de tegenovergestelde rigting moet zij wederstand bieden. Duidt men deze elementaire drukking, loodregt tegen de as uitgeoefend, door d_r aan, dan is:

$$d_r = \frac{r}{x}\{\omega^2 x\partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial x\} = \frac{r}{y}\{\omega^2 y\partial m - 2\partial(\lambda_3 \partial y)\}.$$

Denkt men deze drukking, in de rigting van den straal r uitgeoefend wordende, ontbonden in twee drukkingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y, dan blijkt dat de twee uitdrukkingen voor d_r juist die zijn, welke de zamengestelde drukking d_r zouden geven door middel der uitdruk-

kingen voor de zamenstellende drukkingen d_x en d_y. Maar dan volgt daaruit wederom dat op eenig element, hebbende x, y, z (z onbepaald maar standvastig zijnde onder de beweging) tot coördinaten, drukkingen worden uitgeoefend evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y, in grootte bepaald door

$$\left.\begin{aligned} d_x &= \omega^2 x\,\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial x), \\ d_y &= \omega^2 y\,\partial m - 2\partial(\lambda^3\,\partial y). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

De integralen van deze vergelijkingen, uitgestrekt over de geheele massa, zullen de totale zamenstellende drukkingen geven, en elke dezer zal ook gelijk zijn aan de zamengestelde of enkele drukking loodregt tegen de as uitgeoefend, de eerste in het coördinatenvlak xz, de tweede in het coördinatenvlak yz. Zoo dan deze drukkingen aangeduid worden door D_x en D_y, en dat λ_3, x en y aan de limieten der integralen zijn λ''_3, λ'_3, x'', x', y'' en y', zal

$$D_x = \omega^2 \int x\,\partial m - 2\left[\lambda''_3\,\partial x'' - \lambda'_3\,\partial x'\right],$$

$$D_y = \omega^2 \int y\,\partial m - 2\left[\lambda''_3\,\partial y'' - \lambda'_3\,\partial y'\right]$$

zijn. Maar (zie boven de vergelijkingen (12)) de waarden van λ_3 aan de grenzen der integralen zijn *nul;* gevolgelijk

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \omega^2 \int x\,\partial m = \omega^2 m x_1\,, \\ D_y &= \omega^2 \int y\,\partial m = \omega^2 m y_1\,, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

indien namelijk x_1, y_1 zijn de coördinaten der projectie op het vlak xy van het zwaartepunt der bewogene massa, en betrekking hebbende hetzij tot eene bepaalde betrekkelijke stelling van het ligchaam (eene stelling bijv. met betrekking tot die bij het begin der beweging), hetzij tot een bepaald oogenblik des tijds eener geheele omwenteling der massa.

De drukkingen d_x, d_y worden oorspronkelijk uitgeoefend tegen of op het element ∂m. Denkt men ze overgebragt tegen de as in de coördinaten-vlakken xz en yz, dan ontstaan er tevens twee elementaire koppels, loodregt op de as van omwenteling (de as der ordinaten z), welke te zamen het enkel koppel $k_z = x\,d_y - y\,d_x$ geven. Er is derhalve ook een zamengesteld of totaal koppel K_z loodregt op de as van omwenteling, maar de beweging om de as

onbelemmerd kunnende geschieden, zal dit zamengestelde koppel van drukkingen klaarblijkelijk *nul* zijn. De berekening leert dit ook. Want

$$\mathrm{K}_z = \int (x\,\mathrm{d}_y - y\,\mathrm{d}_x) = \omega^2 \int (x\,y\,\partial m - y\,x\,\partial m) - 2 \int \left(x\,\partial(\lambda_3 \partial y) - y\,\partial(\lambda_3 \partial x)\right)$$

$$= 2\,\lambda''_3\,(y''\partial x'' - x''\partial y'') - 2\,\lambda'_3\,(y'\partial x' - x'\partial y') + 2\int \lambda_3 \partial y\,\partial x - 2\int \lambda_3 \partial x\,\partial y$$

$$= 2\,\lambda''_3\,(y''\partial x'' - x''\partial y'') - 2\,\lambda'_3 (y'\partial x' - x'\partial y'),$$

dat is $=$ *nul* omdat λ''_3 en λ'_3 *nul* zijn *.

Maar de elementaire drukkingen d_x en d_y tegen de as in de vlakken xz en yz overgebragt zijnde, werken op de verschillende punten der as, en wel elk paar op den afstand z van den oorsprong der coördinaten, indien z is de afstand van het element ∂m, waartoe deze drukkingen behooren, tot het coördinaten-vlak xy. Door elke dezer drukkingen bestaat derhalve eene poging om de as van omwenteling te draaijen om de twee andere coördinaten-assen, en het vermogen daartoe is evenredig aan het moment van die drukking ten opzigte van den oorsprong der coördinaten. De sommen dezer momenten moeten gelijk wezen aan de overeenkomstige momenten der totale zamenstellende drukkingen, en hieruit worden dan bekend de twee punten der as, waarop

* Met betrekking tot het hier beschouwde koppel van drukkingen K_z of k_z merkte de Heer Stamkart aan, dat „daar d_r eene drukking voorstelt in de rigting van den straal r, daaruit geen „koppel kan geboren worden."

Hiermede zal waarschijnlijk bedoeld zijn, dat het koppel K_z of k_z uit den aard der zaak *nul* is, of wel dat tot dit *nul* zijn terstond mogt worden besloten; dat dienvolgens het geven van bewijs, door opzettelijke berekening, overbodig was. Inderdaad zou ook in dezen zin zijn besloten, indien alleenlijk ware geredeneerd over de normale drukkingen tegen de elementen der massa, en dat deze drukkingen langs de normale rigtingen of stralen r waren overgebragt tegen de as, vervolgens ontbonden gedacht, enz. De schrijver stelde zich evenwel voor om het bewijs ook te geven uit de beschouwing der zamenstellende drukkingen op de elementen, voornamelijk om aan te toonen dat, overeenkomstig de strekking zijner Bijdrage, de naar de rekenwijze van Lagrange verkregene formulen, bij het gebruik maken van onbepaalde vermenigvuldigers, eveneens tot het besluit der waarheid moeten voeren.

Verder is door den Heer Stamkart de juiste opmerking gemaakt, dat tot $\mathrm{K}_z = 0$ korter kan worden besloten, onafhankelijk van de grenswaarden van λ_3. Want uit de boven gevondene twee uitdrukkingen voor d_r volgt onmiddellijk $2\,y\,\partial(\lambda_3 \partial x) = 2\,x\,\partial(\lambda_3 \partial y)$ of $2\,\{x\,\partial(\lambda_3 \partial y) - y\,\partial(\lambda_3 \partial x)\} = 0$. Dienvolgens is elke der twee termen in het derde lid der vergelijking $\mathrm{K}_z = \int (x\,\mathrm{d}_y - y\,\mathrm{d}_x) =$ enz. aan *nul* gelijk, en daarom $\mathrm{K}_z = 0$. Het integreren bij gedeelten en het letten op de grenswaarden van λ_3 wordt daarbij onnoodig.

deze totale drukkingen worden uitgeoefend. Zijn z' en z'' de afstanden dezer punten tot den oorsprong der coördinaten, dan zal men hebben

$$z' = \frac{\int z\, d_x}{D_x}, \quad z'' = \frac{\int z\, d_y}{D_y}.$$

De uitdrukkingen voor D_x, D_y en K_z zijn uit die voor d_x en d_y gevonden, zonder dat het noodig was de algemeene waarde van λ_3 te kennen. Alleenlijk moesten de bijzondere waarden van λ_3 aan de limieten der integralen bekend zijn, en men had $\lambda''_3 = 0$ en $\lambda'_3 = 0$. Dit is evenwel ontoereikend ter bepaling van $\int z\, d_x$ en $\int z\, d_y$. Men vindt bijv.

$$\int z\, d_x = \omega^2 \int x z \partial m - 2\int z \partial (\lambda_3 \partial x) = \omega^2 \int x z \partial m - 2\,(\lambda''_3 z'' \partial x'' - \lambda'_3 z' \partial x') + 2\int \lambda_3\, \partial x\, \partial z,$$

dat is

$$\int z\, d_x = \omega^2 \int x z \partial m + 2\int \lambda_3\, \partial x\, \partial z,$$

weshalve λ_3 bekend moet wezen ter bepaling van $\int z d_x$, gelijk dit eveneens gevorderd wordt voor de bepaalde uitdrukkingen der waarden van de drukkingen d_x, d_y.

De factor λ_3 wordt bepaald door de twee eerste vergelijkingen (15). Maar terstond heeft men uit de vergelijking (a), waaruit (15) is verkregen, door $X\partial m$, $Y\partial m$ en C *nul* te stellen,

$$2\lambda_3 (x\partial y - y\partial x) = \int \left(y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \partial m.$$

Zoo lang de integraal onbepaald is, heeft λ_3 geen betrekking tot elementen, aan de limieten geplaatst of gelegen, maar tot eenig element der massa. Tot welk element echter de integraal ook uitgestrekt mogt zijn, altijd zal zij *nul* wezen, vermits C nul zijnde (zie art. 5, na de vergelijking (a)), de uitdrukking onder het integraal-teeken steeds *nul* is. Immers $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega^2 x$ en $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y$, en daarom

$$y \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 x y.$$

Het tweede lid der eerstvoorgaande vergelijking dan *nul* zijnde, moet elke

λ_3 *nul* zijn, gelijk te verwachten was, dewijl λ_3 betrekking heeft tot de voorwaarde van het onderling verband der elementen, en deze zamenhang kan hier, even zoo bij de beweging der massa, als wanneer zij is in rust, niets toebrengen tot het meer of minder zijn van de drukking tegen de as. Deze dan onafhankelijk van λ_3 zijnde, komen *vooreerst* in de plaats der uitdrukkingen (19) deze twee andere geheel bepaalde

$$d_x = \omega^2 x \partial m \quad \text{en} \quad d_y = \omega^2 y \partial m, \ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

welke zijn de bekende formulen of uitdrukkingen voor de grootte der zamenstellende drukkingen op eenig element, verbonden of niet verbonden met, maar sluitende aan de omringende elementen. *In de tweede plaats* heeft men nu ook, hetzij hiermede, hetzij regtstreeks door de uitdrukking voor $\lambda_1 U_1$, boven verkregen, de bekende uitdrukking voor de grootte der drukking op het element ∂m in de rigting van den overeenkomstigen straal r,

$$d_r = \omega^2 r \partial m, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

tevens zijnde de uitdrukking van de middelpuntsvliedende kracht, door de beweging van ∂m geboren en de genoemde drukking veroorzakende. En *in de derde plaats* zullen nu ook de momenten $z d_x$ en $z d_y$ volkomen bepaald zijn, en dan ook de punten der as van omwenteling, die de totale zamenstellende drukkingen D_x, D_y lijden, of ter plaatse van welke de as in twee loodregte rigtingen gedrukt wordt (ten gevolge van de werking der ontwikkelde middelpuntsvliedende krachten). Want de plaatsen dezer punten heeft men nu door deze twee insgelijks bekende formulen:

$$z' = \frac{\int z\, d x}{D_x} = \frac{\omega^2 \int x z \partial m}{\omega^2 m x_1} = \frac{\int x z \partial m}{m x_1};\; z'' = \frac{\int y z \partial m}{m y_1} \ldots\ldots (23)$$

Wordt $z'' = z'$ bevonden, dan wordt de as ook op een enkel punt gedrukt. Gelijk blijkt uit de formule (20), zal dan de enkele of zamengestelde drukking D_r gerigt zijn in het vlak, gaande door de as en door het zwaartepunt, terwijl hare grootte zal bepaald worden door de formule

$$D_r = \omega^2 m \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)} = \omega^2 m r_1. \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

De as wordt bijv. slechts op een enkel punt gedrukt, indien het ligchaam is eene stoffelijke schijf van zeer geringe dikte, zoodat zij als een stoffelijk plat vlak zou kunnen aangemerkt worden, en onder voorwaarde dat de as zij loodregt op dit vlak. Want alsdan hebben de ordinaten z van al de

elementen ∂m zeer nabij eene zelfde grootte ζ, en de formulen (23) geven $z'' = z' = \zeta$, zoodat de enkele drukking $\omega^2 m r_1$ ook uitgeoefend wordt in de rigting der lijn r_1, uit het zwaartepunt der schijf loodregt op de as getrokken.

Is de as van omwenteling eene der drie hoofdassen van het ligchaam met betrekking tot den aangenomén oorsprong der coördinaten, — is derhalve het vlak der coördinaten x en y het vlak der beide andere hoofdassen, gaande door den oorsprong, dan worden z' en z'' *nul*, en de as wordt dan ook slechts in een enkel punt, ter plaatse namelijk van den oorsprong der coördinaten, gedrukt. Ligt bovendien het zwaartepunt op de as (zoo deze is eene hoofdas), dan zal de draaijende beweging der massa geen drukking op deze hoofdas veroorzaken, omdat x_1 en y_1 *nul* zijn, en bijgevolg ook $r_1 = 0$.

Is de as geen hoofdas, maar ligt het zwaartepunt ergens in de as, dan kunnen de voorgaande formulen niet regtstreeks worden toegepast. De coördinaten x_1 en y_1 nu *nul* zijnde, worden de zamenstellende drukkingen D_x en D_y (formulen (20)) *nul*. Dit *nul* zijn komt alsdan voort uit het bestaan van twee paren van gelijke en tegenovergestelde drukkingen, het eerste paar in het coördinaten-vlak xz, het tweede in het coördinaten-vlak yz, maar de drukkingen van elk paar worden tegen verschillende punten van de as uitgeoefend. Met andere woorden, er zijn alsdan twee koppels van drukkingen, die, tot een zelfden arm herleid, ook tot een enkel koppel kunnen zamengesteld worden. Het vlak van dit enkel koppel gaat door de as en maakt een hoek met de coördinaten-vlakken xz en yz, terwijl de punten der as, in welke zij door de twee krachten van het koppel worden gedrukt, elke twee verschillende punten der as kunnen zijn. De afstand toch dezer punten is de arm van het koppel, en van dezen kan de grootte willekeurig zijn, zoo slechts de grootte van het koppel, dat is het *moment* van het koppel, niet veranderd wordt. De grootte derhalve zoowel als de plaats van één der twee gelijke drukkingen is volstrektelijk onbepaald, en het bepaalde, dat men zou kunnen verlangen te weten, hangt eeniglijk af van den vorm des ligchaams, van de betrekkelijke rigting der as waarop het zwaartepunt ligt, en van bijzondere gestelde voorwaarden.

De derde vergelijking (15), — namelijk $\lambda_2 = 0$, — waarop nog niet is gelet, leert dat, onder de beweging en door de beweging, de elementen der massa, — en dan ook de massa zelve, — in de rigting evenwijdig aan de as geen drukking of spanning lijden. Derhalve wordt ook, bij de eenparige

draaijende beweging der massa, de as in hare rigting niet gedrukt, gespannen of getrokken, zoo als uit den aard der zaak onmiddellijk kan worden opgemerkt.

10. De as wordt ook gedrukt of geschokt door de werking der kracht P, die de massa in beweging brengt, en door de tegenwerking der massa bij het ontvangen van den schok of stoot. Deze uitwerking heeft echter alleenlijk plaats bij het begin der beweging; zij duurt niet voort. Ter bepaling van hare grootte moeten de vergelijkingen (16) dienen, en wel, in de eerste plaats, de twee eerste dezer vergelijkingen. Zij geven:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2x}\left\{\partial X - \frac{\partial x}{\partial t}\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial x)\right\} = -\frac{1}{2y}\left\{\partial Y - \frac{\partial y}{\partial t}\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial y)\right\}.$$

Hierin $-\omega y$ in plaats van $\frac{\partial x}{\partial t}$ en $+\omega x$ voor $\frac{\partial y}{\partial t}$ stellende en daarna met $U_1 = -2r$ vermenigvuldigende, komt

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x}\{\partial X + \omega y\,\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial x)\} = \frac{r}{y}\{\partial Y - \omega x\,\partial m - 2\partial(\lambda_3\,\partial y)\}.$$

Hier zou nu wederom dezelfde gang van rekenen als in art. 9 kunnen gevolgd worden, ter verkrijging van de uitdrukkingen voor de grootte der zamenstellende totale drukkingen en der koppels van drukkingen, maar om de plaats der punten van de as, in welke deze gedrukt wordt, te vinden, is de bepaling van λ_3 noodig, en het is korter dat deze bepaling vooraf geschiede.

Op de wijze, in art. 5 gevolgd om de vergelijking (*a*) te verkrijgen uit de vergelijkingen (9) en (10), zal ook uit de twee eerste der vergelijkingen (16), — en lettende op $\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y$, $\frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x$, $x^2 + y^2 = r^2$, — gevonden worden

$$2\lambda_3\,(y\,\partial x - x\,\partial y) = \int\{\omega r^2\,\partial m - (x\,\partial Y - y\,\partial X)\}.$$

De factor λ_3 heeft hier betrekking tot eenig element ∂m, en de integraal in het tweede lid dezer vergelijking is onbepaald. Zij kan gedacht worden uitgestrekt te moeten worden tot dat element ∂m, wáár ook binnen de massa gelegen, en dan is de integraal zoowel *nul* voor het gedeelte als voor de geheele massa. Moest zij worden aangemerkt alleenlijk betrekking te hebben tot eenig element, tot een enkel element, ook dan zou zij *nul* zijn, omdat de uitdrukking onder het integraalteeken *nul* zou wezen. Immers

$$\omega r^2 \partial m = x\partial Y - y\partial X$$

is de vergelijking der draaijende beweging van een enkel vrij element. Daarom dan $\omega r^2 \partial m - (x\partial Y - y\partial X) = 0$, en zoo dan, in elke vooronderstelling, $\lambda_3 = 0$. Men zou kunnen aanmerken, dat dit *nul* zijn van λ_3 had kunnen aangenomen worden uit het hieromtrent reeds ontwikkelde in art. 9. Het kwam evenwel niet geheel overbodig voor, zulks ook af te leiden uit de vergelijkingen (16), welke in het onderwerpelijk geval van beschouwing moesten worden behandeld.

Meer bepaaldelijk is derhalve

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x}\{\partial X + \omega y \partial m\} = \frac{r}{x}\{\partial Y - \omega x \partial m\} \dots\dots\dots\dots (25)$$

Deze uitdrukking geeft de grootte der drukking d_r, op eenig element ∂m uitgeoefend in het vlak der beweging van dit element en in de rigting van den voerstraal r. Men heeft hieruit, of door soortgelijke overwegingen als in art. 9,

$$d_x = \partial X + \omega y \partial m, \quad d_y = \partial Y - \omega x \partial m \dots\dots\dots\dots (26)$$

En dan, zoo x_1 en y_1 zijn de afstanden van het zwaartepunt des ligchaams tot de vlakken der coördinaten y, z en x, z,

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int \partial X + \omega \int y \partial m = X + \omega m y_1, \\ D_y &= \int \partial Y - \omega \int x \partial m = Y - \omega m x_1. \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (27)$$

Indien men elke normale drukking d_r, tegen de as uitgeoefend, ontbonden denkt in twee drukkingen d_x en d_y, dan zijn de rigtingen van deze zamenstellende drukkingen in de coördinatenvlakken xz en yz gelegen, en dan zijn D_x en D_y ook de totale zamenstellende drukkingen tegen de as. De punten der as, waarop zij worden uitgeoefend, zijn dan nog onbekend. Om de plaats dezer punten evenwel op de meest algemeene wijze te bepalen, is het noodig eerst nog te letten op de drukkingen, welke evenwijdig aan de as op de elementen zouden worden uitgeoefend, indien men algemeen stelt dat de rigting der kracht P niet is evenwijdig aan het coördinaten-vlak xy, en dat deze kracht dienvolgens is ontbonden geworden in drie zamenstellende krachten X, Y, Z. De derde der vergelijkingen (16) geeft

$$\lambda_2 = -\partial Z.$$

De voorwaardes-vergelijking, waartoe λ_2 betrekking heeft, is

$$L_2 = z - \zeta = 0;$$

derhalve

$$U_2 = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial L_2}{\partial z}\right)^2} = \pm \sqrt{1} = -1.$$

Elk element ondervindt dienvolgens in de rigting, evenwijdig aan de as, eene drukking

$$d_z = \lambda_2 U_2 = \partial Z, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

en de totale drukking evenwijdig aan de as is

$$D_z = \int \partial Z = Z. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

De gewone wijze van herleiden en zamenstellen nu volgende, kunnen de drie drukkingen op elk element vervangen worden door drie dergelijke drukkingen langs de overeenkomstige coördinaten-assen, en door drie koppels van drukkingen loodregt op deze assen. De som van alle drukkingen langs eene zelfde as zal de zamengestelde of totale drukking in de rigting van deze as geven. Deze zamenstelling geeft de drie drukkingen D_x, D_y, D_z, in grootte door de formulen (27) en (29) reeds bepaald, maar zij worden nu uitgeoefend tegen den oorsprong der coördinaten en in de rigting van de drie coördinaten-assen. De koppels, loodregt op eene zelfde coördinaten-as, kunnen mede tot een enkel totaal koppel, loodregt op dezelfde as, worden zamengesteld. Daaruit ontstaan drie koppels K_x, K_y, K_z, loodregt op de assen der coördinaten x, y, z. De beweging om de as der ordinaten z vrijelijk kunnende plaats hebben, zal het koppel K_z geen drukking te weeg brengen; het zal, als koppel van drukkingen, *nul* zijn, en het aan *nul* gelijkstellen van de uitdrukking voor de grootte van dit koppel, zal de reeds gevondene vergelijking der draaijende beweging van de massa wederom te voorschijn brengen. Maar de koppels K_x en K_y geen beweging der massa om hunne assen (de assen der coördinaten x en y) kunnende veroorzaken, zullen de krachten dezer koppels, nadat de koppels zelve evenwijdiglijk zijn verplaatst in de coördinaten-vlakken yz en xz, de as van omwenteling drukken. Het koppel K_x of de krachten of drukkingen van dit koppel dan zamenstellende met de drukking D_y, en eveneens de drukkingen van K_y met de drukking D_x langs de as der abscissen x, komen op nieuw, als zamengestelde drukkingen, de drukkingen D_y en D_x voort, maar nu tegen die punten der as,

ter plaatse van welke zij werkelijk uitgeoefend worden. En indien dan z' en z'' zijn de afstanden van den oorsprong der coördinaten tot die punten der as van omwenteling, alwaar de drukkingen D_x en D_y worden geleden, zullen deze afstanden bekend zijn door de vergelijkingen $z'.D_x = K_y$ en $z''.D_y = K_x$. Voor een enkel element ∂m zouden de drie koppels van drukkingen k_x, k_y, k_z zijn

$$k_x = y\,d_z - z\,d_y, \quad k_y = z\,d_x - x\,d_z, \quad k_z = x\,d_y - y\,d_x,$$

dat is, door de formulen (26) en (28),

$$\left.\begin{aligned} k_x &= y\,\partial Z - z\,\partial Y + \omega x z\,\partial m, \\ k_y &= z\,\partial X - x\,\partial Z + \omega y z\,\partial m, \\ k_z &= x\,\partial Y - \omega x^2\,\partial m - y\,\partial X - \omega y^2\,\partial m = x\,\partial Y - y\,\partial X - \omega r^2\,\partial m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (30)$$

De uitdrukkingen voor de grootte der zamengestelde koppels K_x, K_y, K_z zullen zijn de integralen der tweede leden van deze drie vergelijkingen (30). Let men nu, bij het nemen der integralen over de geheele massa, op hetgeen is aangemerkt in art. 8 bij het vormen der vergelijking (17), te weten dat $\int x\,\partial Y = a\,Y$, $\int y\,\partial X = b\,X$ is, en stelt men bovendien, meer algemeen dan in dat artikel, dat het werkpunt der kracht P niet gelegen zij in het coördinaten-vlak xy, maar op eene verwijdering c van dit vlak, zoodat $\int z\,\partial X = c\,X$ en $\int z\,\partial Y = c\,Y$ zij, dan komt

$$\left.\begin{aligned} K_x &= Zb - Yc + \omega \int xz\,\partial m, \\ K_y &= Xc - Za + \omega \int yz\,\partial m, \\ K_z &= Ya - Xb - \omega \int r^2\,\partial m, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

De uitdrukking voor K_z, aan *nul* gelijk gesteld, geeft de vergelijking (17) der draaijende beweging, en met de uitdrukkingen voor K_y en K_x zal men nu hebben:

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{K_y}{D_x} = \frac{Xc - Za + \omega \int yz\,\partial m}{X + \omega m y_1}, \\ z'' &= \frac{K_x}{D_y} = \frac{Zb - Yc + \omega \int xz\,\partial m}{Y - \omega m x_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Bij het mededeelen der beweging, dat is bij het begin der beweging, als de massa met eene hoeksnelheid ω zal aanvangen te draaijen, worden er dan, in het algemeen, drie drukkingen geleden. Eene, D_z, in de rigting der as, en twee andere loodregt tegen de as, te weten D_x in het coördinaten-vlak xz op een afstand z' van den oorsprong, en D_y in het coördinaten-vlak yz op een afstand z'' van den oorsprong der coördinaten. Onder de beweging zelve bestaan deze drukkingen niet. Echter kan het geval plaats hebben, dat het ligchaam, op eenig oogenblik der beweging, door eene kracht P' gebotst wordt en op nieuw in de eene of andere rigting een stoot ontvangt, zoodat de hoeksnelheid ω positievelijk of negatievelijk zou veranderen. De drukkingen, hieruit ontstaande en op dat oogenblik komende bij die, welke de middelpuntvliedende krachten overeenkomstig de nog onveranderde hoeksnelheid ω hebben te weeg gebragt (formulen (20)), worden eveneens door de voorgaande formulen bepaald, mits ω dan zij de positieve of negatieve aangroeijing der bestaande hoeksnelheid. Na den schok worden ook deze drukkingen niet meer geleden; vermits evenwel de hoeksnelheid alsdan eene andere grootte heeft, zal de uitwerking der middelpuntsvliedende kracht in andere mate dan vóór dezen schok bestaan, zoodat ook de drukkingen, hierdoor tegen de as veroorzaakt, eene andere grootte zullen hebben en tegen andere punten van de as zullen worden uitgeoefend.

Indien de afstanden z' en z'' bevonden worden gelijk te zijn, zullen de twee drukkingen D_x en D_y tot eene enkele drukking zamengesteld kunnen worden. Dit zal bijv. het geval zijn indien de vaste as is eene der drie hoofdassen van het ligchaam met betrekking tot den aangenomen oorsprong der coördinaten, en dat de kracht P is gerigt geweest in het vlak (xy) der beide andere hoofdassen. Want alsdan zijn de tellers der gebrokene uitdrukkingen (32) *nul*, en daarom ook $z' = 0$ en $z'' = 0$. De enkele drukking zal worden geleden tegen het punt der as, dat als oorsprong der coördinaten is aangenomen. Gaat de vaste as tevens door het zwaartepunt, dan is $D_x = X$ en $D_y = Y$, en de grootte der enkele zamengestelde drukking zal $= P$ zijn, gelijk ook de rigting, waarin zij wordt uitgeoefend, evenwijdig zal wezen aan de rigting, waarin de kracht P heeft gewerkt.

Eveneens zullen z' en z'' gelijk worden en de twee drukkingen D_x en D_y tot eene enkele drukking herleidbaar zijn, bijaldien de vaste as is eene der drie hoofdassen, welke tot het zwaartepunt behooren, derhalve eene der drie voorname hoofdassen, en dat de kracht P heeft gewerkt in eenig vlak, lood-

regt op de as gerigt. Want zoodanige as is, gelijk men weet, hoofdas met betrekking tot elk van hare punten, en men behoeft daarom het aangenomen coördinaten-vlak xy slecht evenwijdiglijk verplaatst te denken, zoodat het ga door het punt der as, alwaar deze door het pas genoemd loodregt vlak wordt gesneden, — of liever, zoodat het invalle met het vlak der kracht P, — om dit geval tot het voorgaande terug te brengen.

Is de rigting der kracht in een vlak, loodregt op de as van omwenteling, en is deze as eene hoofdas van het ligchaam met betrekking tot het punt, waarin zij genoemd vlak snijdt, dan worden de beide drukkingen op dit zelfde enkele punt uitgeoefend en kunnen tot één drukking worden zamengesteld. Deze enkele drukking grooter en kleiner kunnende zijn, zou ook *nul* kunnen wezen. Maar dan zijn ook D_x en D_y *nul*, en men heeft (27)

$$X = -\omega m y_1, \quad Y = +\omega m x_1;$$

weshalve

$$\frac{X}{Y} = -\frac{y_1}{x_1}.$$

Hieruit volgt, dat de rigting der kracht loodregt moet zijn op die der lijn r_1, vereenigende den oorsprong der coördinaten met de projectie van het zwaartepunt op het vlak xy (en gelijk zijnde aan den afstand van het zwaartepunt tot de as), waarin de kracht P heeft gewerkt. Derhalve moet de rigting der kracht loodregt zijn op het vlak, gaande door de as en het zwaartepunt der massa. Bovendien zal uit

$$\sqrt{(X^2 + Y^2)} = P = \omega m r_1 \text{ en (18) } Pp = \omega \int r^2 \partial m$$

volgen

$$p = \frac{\int r^2 \partial m}{m r_1},$$

voor den afstand tusschen de rigting der kracht en de as, opdat deze, en als de kracht de genoemde loodregte rigting heeft, *bij het plotselijk medegedeeld worden der beweging*, maar dan ook alleenlijk op dit oogenblik, noch gedrukt noch gebotst worde. De verkregene uitkomst is de bekende, ter bepaling van het zoogenaamd *middelpunt van botsing*.

Indien, eindelijk, de beweging niet is medegedeeld door eene enkele kracht P, maar door een koppel, welks as is de vaste as, of evenwijdig aan

de vaste as, dan zijn X en Y *nul*, en de vaste as zal niet gedrukt worden als zij slechts door het zwaartepunt gaat.

11. Dezelfde gang van rekenen moet gevolgd worden, ter bepaling van de grootte en de plaats van de drukkingen, welke tegen de vaste as worden uitgeoefend bij eene veranderlijke beweging der massa. De formulen (9) en (10) geven

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2x}\left\{\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial x)\right\} = -\frac{1}{2y}\left\{\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial y)\right\}.$$

U_1 is, als boven, $= -2r$, en daarom

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x}\left\{\left(X-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial x)\right\} = \frac{r}{y}\left\{\left(Y-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - 2\,\partial(\lambda_3 \partial y)\right\}.$$

Vermits $\frac{\partial x}{\partial t} = -\omega y$ en $\frac{\partial y}{\partial t} = +\omega x$, zal, daar ω veranderlijk is,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -y\frac{\partial\omega}{\partial t} - \omega\frac{\partial y}{\partial t} = -y\frac{\partial\omega}{\partial t} - \omega^2 x, \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = +x\frac{\partial\omega}{\partial t} - \omega^2 y$$

zijn; weshalve

$$\lambda_1 U_1 = \frac{r}{x}\left\{X\partial m + \omega^2 x\partial m + y\partial m\frac{\partial\omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3 \partial x)\right\} = \frac{r}{y}\left\{Y\partial m + \omega^2 y\partial m - x\partial m\frac{\partial\omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3 \partial y)\right\}.$$

Hieruit blijkt, dat, vermits de drukking $\lambda_1 U_1$ uitgeoefend wordt in eene rigting, normaal zijnde voor het overeenkomstig punt der baan, door het element ∂m beschreven, dat is in de rigting des voerstraals r van de as naar het element, de zamenstellende drukkingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y zullen zijn

$$\left.\begin{aligned} d_x &= X\,\partial m + \omega^2 x\,\partial m + y\,\partial m\frac{\partial\omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3\,\partial x), \\ d_y &= Y\,\partial m + \omega^2 y\,\partial m - x\,\partial m\frac{\partial\omega}{\partial t} - 2\partial(\lambda_3\,\partial y). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Integrerende over de geheele massa, dan komt, naar dezelfde gronden, waarop in art. 9 de formulen (20) uit (19) zijn verkregen,

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X\,\partial m + \omega^2 m x_1 + m y_1\frac{\partial\omega}{\partial t}, \\ D_y &= \int Y\,\partial m + \omega^2 m y_1 - m x_1\frac{\partial\omega}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

En daar uit de vergelijking (11), art. 5, volgt $\lambda_2 = -Z\partial m$, zal, vermits $U_2 = -1$ is,

$$\lambda_2 U_2 = d_z = Z\partial m, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (35)$$

en dan

$$D_z = \int Z\partial m. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (36)$$

zijn. Deze laatste drukking is standvastig gedurende de beweging, indien, gelijk verondersteld is, dezelfde krachten op dezelfde elementen blijven werken. Maar de drukkingen D_x en D_y veranderen van oogenblik tot oogenblik. Zijn derhalve, voor eenig gesteld of gegeven oogenblik der beweging, de hoekversnelling en de hoeksnelheid door de formule (14) bepaald, dan zullen de formulen (34) de zamenstellende totale drukkingen voor dat oogenblik doen bekend worden. Bij den aanvang der beweging kan de hoekversnelling $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ aangemerkt worden te zijn de aanvankelijke hoeksnelheid; middelpuntvliedende krachten zijn er nog niet ontstaan, zoodat de termen $\omega^2 m x_1$ en $\omega^2 m y_1$ alsdan niet in rekening komen, en de formulen (34) zullen dan ook met de in art. 10 verkregene formulen (27) overeenstemmen. Is de beweging eenparig, zijn X, Y en $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ *nul*, dan gaan de formulen (34) over in de formulen (20).

Om de punten der vaste as, ter plaatse van welke deze gedrukt wordt, te vinden, moeten wederom, als boven, de drukkingen op de elementen overgebragt worden in de rigtingen der coördinaten-assen door middel of met tusschenkomst van koppels, loodregt op deze assen. Daartoe moeten de drukkingen d_x en d_y op de elementen nader worden bepaald, zoodat zij niet meer van λ_3 afhangen. Op de wijze als in art. 10, zal uit de vergelijking (*a*), art. 5 (en van welke vergelijking het tweede lid *nul* moet zijn), afgeleid worden dat λ_3, betrekking hebbende tot een enkel element, zamenhangende met de onmiddellijk aangrenzende elementen, *nul* is, zoodat dan de laatste termen der tweede leden van de vergelijkingen (33) wegvallen. Men kan nu de drukkingen d_x, d_y, d_z van het element, waarop zij worden uitgeoefend, overgebragt denken op den oorsprong der coördinaten en gerigt langs de assen der coördinaten x, y, z, mits alsdan bijkomen drie koppels k_x, k_y, k_z, loodregt op deze assen en in grootte bepaald door

$$\left.\begin{aligned} k_x &= y\,d_z - z d_y = y\,Z\,\partial m - z\,Y\,\partial m - \omega^2 yz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}xz\,\partial m,\\ k_y &= z\,d_x - x d_z = z\,X\,\partial m - x\,Z\,\partial m + \omega^2 xz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}yz\,\partial m,\\ k_z &= x\,d_y - y d_x = x\,Y\,\partial m - y\,X\,\partial m - \frac{\partial\omega}{\partial t}(x^2 + y^2). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (37)$$

Deze koppels, genomen over de geheele massa, geven de drie totale zamenstellende koppels:

$$\left.\begin{aligned} K_x &= \int (yZ - zY)\,\partial m - \omega^2 \int yz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int xz\,\partial m,\\ K_y &= \int (zX - xZ)\,\partial m + \omega^2 \int xz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int yz\,\partial m,\\ K_z &= \int (xY - yX)\,\partial m - \frac{\partial\omega}{\partial t}\int r^2\,\partial m. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (38)$$

Het laatste dezer koppels is, als koppel van drukkingen, *nul*, en de uitdrukking zijner grootte aan *nul* gelijk gesteld zijnde, geeft de vroeger reeds gevondene vergelijking (14) voor de draaijende beweging van het vaste ligchaam om de vaste as. De drukking D_z is, door het overgebragt zijn der drukkingen d_z in de rigting van de as der ordinaten z, de totale drukking langs de vaste as; zij ondergaat geene verandering. De drukkingen D_x en D_y evenwel, nu langs de coördinaten-assen x en y uitgeoefend, kunnen met de koppels van drukkingen K_y en K_x, loodregt op de assen der coördinaten, y en x of in de coördinaten-vlakken xz en yz werkende, zamengesteld worden, en daar noch de grootte dezer drukkingen, noch ook hare loodregte rigtingen tegen de as, verandering kunnen ondergaan, zal de plaats, waar zij worden geleden, veranderd worden. Zijn namelijk z' en z'' de afstanden van den oorsprong der coördinaten tot de twee punten der vaste as, ter plaatse van welke zij de drukkingen D_x en D_y moet ophouden, of alwaar zij eigenlijk gedrukt wordt, dan wordt de plaats van elk dezer punten bekend door de formulen:

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{K_y}{D_x} = \frac{\int (zX - xZ)\,\partial m + \omega^2 \int xz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int yz\,\partial m}{\int X\,\partial m + \omega^2\, m x_1 + \frac{\partial\omega}{\partial t} m y_1},\\ z'' &= \frac{K_x}{D_y} = \frac{\int (yZ - zY)\,\partial m - \omega^2 \int yz\,\partial m + \frac{\partial\omega}{\partial t}\int xz\,\partial m}{\int Y\,\partial m + \omega^2\, m y_1 - \frac{\partial\omega}{\partial t} m x_1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (39)$$

Wanneer het oogenblik, voor hetwelk de uitgeoefende of geleden wordende drukkingen zullen bepaald worden, is dat van den aanvang der beweging, worden de termen, die ω^2 tot coëfficiënt hebben, *nul*, en daar, voor dit eerste oogenblik, $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ aangemerkt moet worden als aanvankelijke hoeksnelheid, zullen de formulen (39) voor dit geval overeenstemmen met of denzelfden vorm hebben als de formulen (32), in art. 10 gevonden.

Is de vaste as eene der drie hoofdassen met betrekking tot den oorsprong der coördinaten, en zijn wijders de werkende krachten zoodanig gerigt en verdeeld, of is de massa van zoodanigen vorm en zoodanig door de coördinaten-vlakken gedeeld, dat de sommen der momenten $z X \partial m$ en $x Z \partial m$, $y Z \partial m$ en $z Y \partial m$ gelijk zijn op eenig oogenblik, of ook dat elke dezer sommen *nul* ware, dan worden z' en z'' *nul*. De vaste as zal dan alleenlijk gedrukt worden ter plaatse van den oorsprong der coördinaten, en de twee drukkingen D_x en D_y zullen tot eene enkele drukking kunnen worden zamengesteld.

Ligt het zwaartepunt in den oorsprong of ook slechts ergens op de vaste as, en gebeurt het, door wijze van verdeeld zijn der krachten en door den vorm van het ligchaam, dat de sommen of integralen $\int X \partial m$ en $\int Y \partial m$ rekenkundig nul zijn, dan vinden de formulen (39) geen toepassing, dewijl dit *nul* zijn in het algemeen tot grond zal hebben het bestaan van twee koppels, die dan ook tot een enkel koppel zullen kunnen worden zamengesteld. Zijn evenwel deze sommen of integralen niet *nul*, en is derhalve, in het algemeen, $D_x = \int X \partial m$, $D_y = \int Y \partial m$, even zoo als in elk geval $D_z = \int Z \partial m$ is, dan blijkt dat het bewogen worden der massa niets toebrengt tot het grooter of kleiner zijn der drukkingen tegen de vaste as. Deze zal in de rigtingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en y, bij de beweging evenveel gedrukt worden als wanneer er geen beweging plaats vond, maar dat niettemin dezelfde krachten op de elementen der massa werkzaam waren. Maar de punten der as, op welke de drukkingen worden uitgeoefend, zullen in het eene geval niet dezelfde wezen als in het andere, tenzij de vaste as tevens eene hoofdas is. Want de termen, welke alsdan uit de tellers der gebrokene uitdrukkingen (39) zullen wegvallen, zijn de termen, die moeten ontbreken ter bepaling van z' en z'' als de massa niet draait of niet

zou kunnen draaijen, hetzij b. v. indien zij tegen de as zoo sterk ware aangeklemd, dat de werkende krachten niet zouden vermogen haar te bewegen, hetzij dat er, op andere wijze, eenig ander beletsel bestond.

§ II.

BEWEGING VAN EEN VAST LIGCHAAM OM EEN VAST PUNT.

1. Indien een vast ligchaam verbonden is met een vast punt, om hetwelk beweging van het ligchaam mogelijk is, kan men zich voorstellen de omstandigheden dezer beweging te bepalen, in de vooronderstelling dat zij plaats heeft ten gevolge eener onafgebrokene werking van krachten op de elementen van het ligchaam of der vaste massa, zoodat deze telkens, in verschillende rigtingen, nieuwe indrukken ontvangt, en genoodzaakt wordt sneller en minder snel, en meer of minder op- of neêrwaarts geneigd, om het vaste punt te draaijen.

Het voorstel ter bepaling van deze draaijende beweging zal opgelost zijn, indien men voor elk oogenblik weet of kan aanwijzen de stelling der massa met betrekking tot drie onderling regthoekig gerigte coördinaten-vlakken of coördinaten-assen, welke door het vaste punt gaan en in de ruimte niet van streek veranderen. Het zou dan genoeg zijn op elk oogenblik de stelling te kennen van twee bepaalde punten der massa, die met het vaste punt niet in dezelfde regte lijn gelegen zijn. Het vlak, gaande door deze twee punten en door het vaste punt, is als ware het een coördinaten-vlak voor de punten der massa, en eene der twee lijnen, uit het vaste punt naar de twee gedachte punten getrokken, kan als eene coördinaten-as worden aangemerkt. Kent men nu den stand, zoowel van deze lijn als van dat vlak, ten opzigte van de onveranderlijke coördinaten-vlakken, dan is hierdoor de stelling van het bewogen ligchaam ganschelijk bepaald. Maar het is eenvoudiger drie onderling regthoekig gerigte lijnen te denken, gaande

door het vaste punt en binnen de massa, of ten opzigte van de elementen der massa, onveranderlijk gelegen zijnde. De vlakken der drie paren van deze lijnen kunnen als coördinaten-vlakken, en de lijnen zelve als de coördinaten-assen van de elementen der massa aangenomen worden. Zij hebben met de bovengenoemde onbewegelijke coördinaten-assen het vaste punt, als oorsprong der coördinaten, gemeen, maar zij deelen in de beweging van het ligchaam en zullen hier heeten *de coördinaten-assen der massa.*

Terwijl de elementen der massa onveranderlijk zamenhangen, behoudt elk element, bij de beweging van het ligchaam om het vaste punt, een onveranderlijken afstand van dit punt. De baan derhalve, door eenig element gevolgd of beschreven wordende, is voortdurend in het oppervlak van een zelfden bol, wiens middelpunt is het vaste punt. Bij de voorwaarde van het onveranderlijk zamenhangen der elementen bestaat hierin de voorwaarde hunner gedwongene beweging.

De beweging der massa kan alleenlijk eene draaijende beweging zijn. Daarom moet er eene lijn wezen, gaande door het vaste punt, om welke, als om eene as, deze beweging geschiedt. Maar is deze as eene lijn, door eenig element der massa en door het vaste punt gaande, dan is het wel mogelijk dat de draaijende beweging om haar voortduurt, als om eene vaste as; doch het geval, waarin dit kan plaats hebben, een zeer bijzonder geval zijnde, moet men in het algemeen stellen, dat deze as niet alleenlijk gedurig eene andere stelling ten opzigte van de vaste coördinaten-assen zal hebben, maar ook dat hare rigting ten aanzien van de coördinaten-assen der massa veranderlijk zal zijn. Is derhalve de lijn, door eenig element en het vaste punt getrokken, de as om welke, op zeker oogenblik, de massa eene draaijende beweging heeft, dan zullen, in de volgende oogenblikken, andere dergelijke lijnen, gerigt naar andere elementen, die opvolgend niet gelegen zijn in de rigting van een zelfden voerstraal, eveneens assen van omwenteling zijn of kunnen zijn. Gevolgelijk is de as van omwenteling niet slechts eene lijn, welke met de massa om het vaste punt bewogen wordt, maar ook hare plaats of rigting ten opzigte van de elementen der massa is niet bestendig. De beweging der massa is wel eene wentelende beweging om eene as, maar dit slechts, voor eene zelfde as, gedurende een differentiaal-oogenblik. In een volgend dergelijk oogenblik draait het ligchaam om eene andere as, oneindig digt nevens de eerste gerigt. De draaijende beweging gaat als ware het onophoudelijk van de eene as op eene onmiddellijk vol-

gende over; de as van omwenteling is eene *onbestendige as*, eene *as voor een ondeelbaar oogenblik*.

Bij de beweging van een ligchaam om eene as, — hoe kort ook de duur der beweging zij, of hoe klein het boogje, door eenig punt van dit ligchaam beschreven, — bestaat hoeksnelheid van beweging om de as, of hoeksnelheid met betrekking tot de as. Deze snelheid kan ontbonden gedacht worden; en zoo dan de rigting der onbestendige as bekend ware ten opzigte van de coördinaten-assen der massa, zou de hoeksnelheid met betrekking tot de onbestendige as ook gedacht kunnen worden vervangen te zijn, door betrekkelijke hoeksnelheden, dat is door die van zamenstellende bewegingen om de coördinaten-assen der massa, even zoo als dit ten opzigte van de onbewegelijke coördinaten-assen kan worden begrepen. Wederkeerig, zoo men, voor eenig oogenblik der beweging, kende de zamenstellende hoeksnelheden, hetzij met betrekking tot de vaste coördinaten-assen, hetzij ten aanzien van de coördinaten-assen der massa, zou uit deze besloten kunnen worden én tot de grootte van de hoeksnelheid der ware beweging om de onbestendige as, én te gelijk tot de rigting dezer as. Zoo eenige lijn, door het vaste punt getrokken, en zekere bepaalde stelling ten opzigte van de elementen der massa hebbende, voor een oogenblik as van beweging kan zijn, kan dit ook op elke der coördinaten-assen van de massa toegepast worden. En zoo dan elke dezer assen op hare beurt onbestendige as ware, zou er werkelijk beweging om deze as en hoeksnelheid ten opzigte van eene coördinaten-as der massa bestaan. Maar het is duidelijk dat de hoeksnelheden met betrekking tot de coördinaten-assen der massa niet in dezen bijzonderen zin moeten gedacht worden, al ware het ook mogelijk dat eene dezer lijnen, onder de beweging, onbestendige as wierd. Van een anderen kant evenwel heeft de massa inderdaad beweging met betrekking tot hare coördinaten-assen. Deze assen toch worden met de massa bewogen, en als men de beweging nagaat gedurende den tijd ∂t, dan stelt men zich voor te onderzoeken, welke ligging of welken stand de assen der massa hebben op het einde van den tijd ∂t met betrekking tot dien, welken zij hadden bij den aanvang van dit oneindig klein tijdsdeel. De elementen der massa hebben na dezen differentiaal-tijd eene andere plaats, en alhoewel de coördinaten der elementen met betrekking tot de coördinaten-assen der massa steeds dezelfde zijn, ondergaan zij niettemin verandering, als men de verandering in rigting der coördinaten-assen in aanmerking neemt, dat is als men let

op een volgenden stand met betrekking tot een onmiddellijk voorgaanden. Het is derhalve geoorloofd snelheid van beweging der elementen, verandering van snelheid of versnelling, verandering van de coördinaten der elementen of differentialen dezer coördinaten, te stellen of te rekenen met betrekking tot de coördinaten-assen der massa. Maar bij het onderzoek der beweging van deze assen zelve moeten klaarblijkelijk de vaste assen der coördinaten als rigtingen ter vergelijking worden aangenomen.

De differentiaal-beweging van de massa met betrekking tot hare coördinaten-assen, en de differentiaalbeweging dezer assen met betrekking tot de vaste coördinaten-assen, zijn bewegingen die gelijktijdig plaats hebben; zij zijn in eene zelfde beweging begrepen. Zij hangen echter in dier voege zamen, dat de laatste bepaald is door de eerste, van welke dan ook de omstandigheden als die eener onafhankelijke beweging kunnen worden onderzocht en gekend.

Men zal namelijk de stelling van de coördinaten-assen der massa kunnen vinden op eenig oogenblik der beweging, zoodra bekend zijn geworden de functiën of uitdrukkingen, die, voór zoodanig oogenblik, de grootte geven van de hoeksnelheden der beweging van de massa met betrekking tot hare coördinaten-assen. Deze functiën worden verkregen uit de differentiaal-vergelijkingen der beweging van de massa met betrekking tot hare coördinaten-assen. Het bepalen dezer differentiaal-vergelijkingen is een voornaamst gedeelte der oplossing van het voorstel der beweging van een vast ligchaam om een vast punt, en tot deze bepaling, door middel van het beginsel van d'Alembert, wordt nu in de eerste plaats overgegaan.

2. Aannemende, dat op al de elementen der massa krachten werken, — dat deze ontbonden zijn in rigtingen evenwijdig aan de coördinaten-assen der massa, — en dat, zoo doende, gelijk in art. 1 van § I, de krachten op elk element vervangen zijn door drie krachten $X\partial m$, $Y\partial m$, $Z\partial m$, dan moet hier ook wederom worden uitgegaan van de algemeene vergelijking (1) der virtuele momenten. Om haar toe te passen, moeten de voorwaarden der variatiën van de onbepaalde coördinaten der elementen in rekening worden gebragt. Deze voorwaarden zijn die der gedwongene beweging van het ligchaam om het vaste punt, — door welke elk element denzelfden afstand e tot het vaste punt (tot den oorsprong der coördinaten) behoudt, — en die van den onveranderlijken zamenhang der elementen van de massa, door

welk verband de onderlinge oneindig kleine afstanden tusschen opvolgende elementen dezelfde blijven.

De eerste dezer voorwaarden wordt uitgedrukt door de vergelijking:

$$L_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

gevende deze eerste voorwaardes-vergelijking der variatiën van de coördinaten:

$$\delta L_1 = 2\,x\delta x + 2\,y\delta y + 2\,z\delta z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Aangezien er slechts drie onbepaalde coördinaten x, y, z zijn, kan het aantal der voorwaardes-vergelijkingen niet meer dan *drie* bedragen. Moest alleenlijk de voorwaarde van zamenhang en onafgebrokene onveranderlijke opvolging of aansluiting der elementen in aanmerking komen, dan zouden daartoe *drie* vergelijkingen kunnen worden gesteld, uitdrukkende dat de variatiën der drie afstanden tusschen vier, in eenige kromlijnige of veranderlijke rigting, onmiddellijk opvolgende punten *nul* zijn. Twee zoodanige vergelijkingen reiken hier echter toe, vermits reeds eene (41) van de drie noodige bestaat. Deze twee kunnen naar den genoemden grond gevormd worden, doch men kan ze ook vinden uit dezelfde voorwaarde, door welke de vergelijking (41) is verkregen. Zijn toch de afstanden van drie onmiddellijk op elkander volgende elementen onveranderlijk, dan zullen ook de variatiën der afstanden van het tweede en derde dezer elementen tot het vaste punt, even zoo als de variatie van den afstand des eersten elements tot dit punt, *nul* zijn. Van drie opvolgende elementen of punten der massa zijn de coördinaten x, y, z; $x + \partial x$, $y + \partial y$, $z + \partial z$, $x + 2\partial x + \partial^2 x$, $y + 2\partial y + \partial^2 y$, $z + 2\partial z + \partial^2 z$, en gelijk dan de vergelijking (41) is verkregen uit

$$\delta\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

zullen de twee andere voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de coördinaten moeten voortkomen uit of ontwikkelingen en vervormingen moeten zijn van deze twee vergelijkingen:

$$\delta\,\{(x + \partial x)^2 + (y + \partial y)^2 + (z + \partial z)^2\} = 0,$$
$$\delta\,\{(x + 2\partial x + \partial^2 x)^2 + (y + 2\partial y + \partial^2 y)^2 + (z + 2\partial z + \partial^2 z)^2\} = 0.$$

De eerste ontwikkeld zijnde gelijk de overeenkomstige, uit welke de vergelijking (7) in art. 5 § 1 is afgeleid, zal geven:

$$\delta L_2 = 2\,\partial x\,\partial\,\delta x + 2\,\partial y\,\partial\,\delta y + 2\,\partial z\,\partial\,\delta z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

De tweede vergelijking wordt, bij ontwikkeling,

$$0 = 2\,(x + 2\partial x + \partial^2 x)\,(\delta x + 2\partial\,\delta x + \partial^2\,\delta x) + 2\,(y + 2\partial y + \partial^2 y)\,(\delta y + 2\partial\,\delta y + \partial^2\,\delta y) +$$
$$2\,(z + 2\partial z + \partial^2 z)\,(\delta z + 2\partial\,\delta z + \partial^2 \delta z) = (2x\,\delta x + 2y\,\delta y + 2z\,\delta z) + 2\,(2\partial x\,\delta x +$$
$$2\,x\partial\delta x + 2\,\partial y\,\delta y + 2\,y\partial\,\delta y + 2\,\partial z\delta z + 2\,z\partial\delta z) + 2\,(2\partial x\,\partial\,\delta x + 2\partial y\,\partial\,\delta y + 2\partial z\,\partial\,\delta z)$$
$$+ 2(4\partial x\partial\delta x + 2\partial^2 x\delta x + 2x\partial^2\delta x + 4\partial y\partial\delta y + 2\partial^2 y\delta y + 2y\partial^2\delta y + 4\partial z\partial\delta z + 2\partial^2 z\delta z + 2z\partial^2\delta z)$$
$$+ 2\,(2\partial^2 x\partial\,\delta x + 2\,\partial x\,\partial^2\delta x + 2\,\partial^2 y\partial\,\delta y + 2\,\partial y\,\partial^2\partial y + 2\partial^2 z\partial\,\delta z + 2\,\partial z\,\partial^2\delta z) +$$
$$2\,(\partial^2 x\,\partial^2\delta x + \partial^2 y\,\partial^2\delta y + \partial^2 z\,\partial^2\delta z)$$
$$= \delta L_1 + 2\partial\delta L_1 + 2\,\delta L_2 + 2\partial^2\,\delta L_1 + 2\partial\,\delta L_2 + 2\partial^2 x\,\partial^2\delta x + 2\,\partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + 2\partial^2 z\partial^2\,\delta z.$$

Aangezien nu $\delta L_1 = 0$, $\delta L_2 = 0$ zijn, en daarom ook de differentialen dezer variatiën gelijk *nul*, komt, als derde voorwaardes-vergelijking der variatiën van x, y, z, *

$$\delta L_3 = 2\,\partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + 2\,\partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + 2\,\partial^2 z\,\partial^2\,\delta z = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Om de bepaalde vergelijking der virtuele momenten te hebben, moet de onbepaalde vergelijking (1) (§ I, art. 1) zamengenomen worden met deze drie vergelijkingen

$$\int \lambda_1 \delta L_1 = \int 2\,\lambda_1\,(x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z) = 0,$$

$$\int \lambda_2\,\delta L_2 = \int 2\,\lambda_2\,(\partial x\,\partial\,\delta x + \partial y\,\partial\,\delta y + \partial z\,\partial\,\delta z) = 0,$$

$$\int \lambda_3\,\delta L_3 = \int 2\,\lambda_3\,(\partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + \partial^2\,y\,\partial^2\,\delta y + \partial^2 z\,\partial^2\,\delta z) = 0.$$

Vooraf echter kunnen de twee laatste, door het integreren bij gedeelten, worden herleid, zoodat de termen onder de integraal-teekens geen differentialen van de variatiën maar eeniglijk deze variatiën zelve tot factoren hebben. Daartoe, als vroeger, aannemende of stellende, dat λ''_1 λ'_1, λ''_2 λ'_2, λ''_3 λ'_3, $\partial x''$ $\partial x'$, $\partial y''$ $\partial y'$, $\partial z''$ $\partial z'$ enz. zijn de waarden van λ_1, λ_2, λ_3, ∂x, ∂y, ∂z enz. aan de grenzen der integralen, zal de tweede der voorgaande vergelijkingen moeten vervangen worden door deze andere:

---

* Zie de aanteekening, aan het einde dezer Bijdrage.

$$-\int\Big[2\,\delta x\,\partial(\lambda_2\,\partial x)+2\,\delta y\,\partial(\lambda_2\,\partial y)+2\,\delta z\,\partial(\lambda_2\,\partial z)\Big]+2\,\{(\lambda''_2\,\partial x'')\,\delta x''-(\lambda'_2\,\partial x')\,\delta x'\}$$
$$+2\,\{(\lambda''_2\,\partial y'')\,\delta y''-(\lambda'_2\,\partial y')\,\delta y'\}+2\,\{(\lambda''_2\,\partial z'')\,\delta z''-(\lambda'_2\,\partial z')\,\delta z'\}=0.$$

De laatste of derde van die vergelijkingen zal overgaan in:

$$0=\int\{2\delta x\partial^2(\lambda_3\partial^2 x)+2\delta y\partial^2(\lambda_3\partial^2 y)+2\delta z\partial^2(\lambda_3\partial^2 z)\}-2\,\{\delta x''\partial(\lambda''_3\partial_3 x'')-\delta x'\partial(\lambda'_3\partial^2 x')\}$$
$$-2\,\{\delta y''\,\partial(\lambda''_3\,\partial^2 y'')-\delta y'\,\partial(\lambda'_3\,\partial^2 y')\}-2\,\{\delta z''\,\partial(\lambda''_3\,\partial^2 z'')-\delta z'\,\partial(\lambda'_3\,\partial^2 z')\}+$$
$$2\,\{(\lambda''_3\,\partial^2 x'')\,\partial\,\delta x''-(\lambda'_3\,\partial^2 x')\,\partial\,\delta x'\}+2\,\{(\lambda''_3\,\partial^2 y'')\,\partial\,\delta y''-(\lambda'_3\,\partial^2 y')\,\partial\,\delta y'\}+$$
$$2\,\{(\lambda''_3\,\partial^2 z'')\,\partial\,\delta z''-(\lambda_3\,\partial^2 z')\,\partial\,\delta z'\}.$$

En hiermede komt dan deze bepaalde vergelijking der virtuele momenten:

$$0=\int\Big\{\Big[X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m+2\,\lambda_1\,x-2\partial(\lambda_2\,\partial x)+2\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 x)\Big]\delta x+$$
$$\Big[Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\,\lambda_1\,y-2\partial(\lambda_2\,\partial y)+2\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 y)\Big]\delta y+$$
$$\Big[Z\,\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\,\lambda_1\,z-2\partial(\lambda^2\,\partial z)+2\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 z)\Big]\delta z\Big\}$$
$$+2\,\{\lambda''_2\partial x''-\partial(\lambda''_3\partial^2 x'')\}\,\delta x''-2\,\{\lambda'_2\partial x'-\partial(\lambda'_3\partial^2 x')\}\,\delta x'+2(\lambda''_3\partial^2 x'')\partial\delta x''-2(\lambda'_3\partial^2 x')\partial\delta x'$$
$$+2\,\{\lambda''_2\partial y''-\partial(\lambda''_3\partial^2 y'')\}\,\delta y''-2\,\{\lambda'_2\partial y'-\partial(\lambda'_3\partial^2 y')\}\,\delta y'+2(\lambda''_3\partial^2 y'')\partial\delta y''-2(\lambda'_3\partial^2 y')\partial\delta y'$$
$$+2\,\{\lambda''_2\partial z''-\partial(\lambda''_3\partial^2 z'')\}\,\delta z''-2\,\{\lambda'_2\partial z'-\partial(\lambda'_3\partial^2 z')\}\,\delta z'+2(\lambda''_3\partial^2 z'')\partial\delta z''-2(\lambda'_3\partial^2 z')\partial\delta z'\,.\quad(44)$$

De integraal, in deze vergelijking voorkomende, wordt gedacht over de geheele massa uitgestrekt te zijn; zij is derhalve, alhoewel zonder bepaalde aanduiding, eene bepaalde integraal. Maar in deze zelfde vergelijking zijn nu al de variatiën, zoowel de bepaalde (buiten de integraal) als de onbepaalde (in de integraal) onderling onafhankelijk. Daarom wordt aan de vergelijking voldaan door den coëfficiënt van elke der variatiën gelijk *nul* te stellen. Derhalve zal men de navolgende vergelijkingen hebben:

$$X\,\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1\,x-2\,\partial(\lambda_2\,\partial x)+2\,\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 x)=0;\;\ldots\ldots\ldots\;(45)$$

$$Y\,\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1\,y-2\,\partial(\lambda_2\,\partial y)+2\,\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 y)=0;\;\ldots\ldots\ldots\;(46)$$

$$Z\,\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1\,z-2\,\partial(\lambda_2\,\partial z)+2\,\partial^2(\lambda_3\,\partial^2 z)=0.\;\ldots\ldots\ldots\;(47)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda''_2\partial x'' - \partial(\lambda''_3\partial^2 x'') = 0;\ \lambda'_2\partial x' - \partial(\lambda'_3\partial^2 x') = 0;\ \lambda''_3\partial^2 x'' = 0;\ \lambda'_3\partial^2 x' = 0. \\ \lambda''_2\partial y'' - \partial(\lambda''_3\partial^2 y'') = 0;\ \lambda'_2\partial y' - \partial(\lambda'_3\partial^2 y') = 0;\ \lambda''_3\partial^2 y'' = 0;\ \lambda'_3\partial^2 y' = 0. \\ \lambda''_2\partial z'' - \partial(\lambda''_3\partial^2 z'') = 0;\ \lambda'_2\partial z' - \partial(\lambda'_3\partial^2 z') = 0;\ \lambda''_3\partial^2 z'' = 0;\ \lambda'_3\partial^2 z' = 0. \end{array}\right\} \ldots (48)$$

Wanneer uit de vergelijkingen (45), (46), (47), twee aan twee genomen, de onbepaalde factor λ_1 wordt geëlimineerd, zullen de onbepaalde integralen der komende vergelijkingen, na herleiding door middel van het integreren bij gedeelten, bevonden worden te zijn:

$$\left.\begin{array}{l} \int\left\{\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - (y\,\mathrm{Z}\,\partial m - z\,\mathrm{Y}\,\partial m)\right\} - 2\,\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\}\,z \\ \qquad + 2\,\{\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\}\,y - 2\,\lambda_3\,(\partial z\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 z) = \mathrm{C}_1; \\ \int\left\{\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\partial m - (z\,\mathrm{X}\,\partial m - x\,\mathrm{Z}\,\partial m)\right\} - 2\,\{\lambda^2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\}\,x \\ \qquad + 2\,\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\}\,z - 2\,\lambda_3\,(\partial x\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 x) = \mathrm{C}_2; \\ \int\left\{\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - (x\,\mathrm{Y}\,\partial m - y\,\mathrm{X}\,\partial m)\right\} - 2\,\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\}\,y \\ \qquad + 2\,\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\}\,x - 2\,\lambda_3\,(\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y) = \mathrm{C}_3. \end{array}\right\} \ldots (b)$$

De tweede leden C_1, C_2, C_3 dezer vergelijkingen zijn *nul*, vermits de integralen, in de eerste leden aanwezig, aan de eerste van hare limieten verdwijnen, terwijl ook de overige termen van die eerste leden aan dezelfde eerste limiet *nul* zijn, op grond van de vergelijkingen (48). Deze termen vallen insgelijks weg aan de tweede limiet der integralen. Worden derhalve de vergelijkingen (*b*) uitgestrekt over de geheele massa, dan blijven in de eerste leden alleenlijk de integraal-uitdrukkingen met betrekking tot de geheele massa, en er komen alzoo deze drie vergelijkingen, welke zijn de oorspronkelijke of onherleide vergelijkingen der beweging van een vast ligchaam om een vast punt:

$$\left.\begin{array}{l} \int\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m = \int\left(y\,\mathrm{Z}\,\partial m - z\,\mathrm{Y}\,\partial m\right); \\ \int\left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\partial m = \int\left(z\,\mathrm{X}\,\partial m - x\,\mathrm{Z}\,\partial m\right); \\ \int\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m = \int\left(x\,\mathrm{Y}\,\partial m - y\,\mathrm{X}\,\partial m\right). \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (49)$$

5. De vergelijkingen der beweging kunnen ook verkregen worden door

eerst de vergelijkingen (45), (46), (47) te integreren, alsdan uit de onbepaalde integralen λ_2 te elimineren, en daarna, nogmaals integrerende, de integralen over de geheele massa te nemen; de factor λ_1 zal daarbij wegvallen. Uit de onbepaalde integralen van de vergelijkingen (45), (46), (47) zal volgen

$$\left.\begin{aligned} 2\,\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\} &= \int\left\{X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,x\right\},\\ 2\,\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\} &= \int\left\{Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,y\right\},\\ 2\,\{\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\} &= \int\left\{Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,z\right\}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (50)$$

Aan de eerste limiet zijn de integralen *nul*, en volgens de vergelijkingen (48) zijn, voor deze limiet, ook de eerste leden dezer vergelijkingen *nul*; daarom behoeven geen standvastige termen of grootheden bijgevoegd te worden, of liever deze zijn *nul*. Strekt men de vergelijkingen (50) over de geheele massa uit, daarbij wederom op de vergelijkingen (48) lettende, dan heeft men deze andere vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} \int\left(X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,x\right) &= 0,\\ \int\left(Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,y\right) &= 0,\\ \int\left(Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m + 2\,\lambda_1\,z\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (51)$$

Elimineert men nu λ_2 uit de vergelijkingen (50), twee aan twee genomen, dan zullen er drie vergelijkingen komen, die men wederom zal kunnen integreren, en neemt men, op de drie zoo even verkregene vergelijkingen lettende, deze integralen over de geheele massa, dan zullen daaruit de vergelijkingen der beweging ontstaan. Het zij genoeg dit voor één dezer vergelijkingen aan te toonen. Men eliminere λ_2 b. v. uit de tweede en derde der vergelijkingen (50); dit zal geven

$$\partial y\int\left(Z\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial^2 t}\partial m + 2\lambda_1 z\right) - \partial z\int\left(Y\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + 2\lambda_1 y\right) + 2\partial y.\partial(\lambda_3\partial^2 z) - 2\partial z.\partial(\lambda_3\partial^2 y) = 0,$$

en, bij gedeelten integrerende,

$$y\int\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 z\right)-z\int\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 y\right)-\int y\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 z\right)$$
$$+\int z\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 y\right)+2\lambda_3(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y)=0.$$

Het tweede lid is *nul*, omdat aan de eerste limiet der integralen het geheele eerste lid *nul* is; de integralen toch, in dit eerste lid aanwezig, zijn, bij die limiet, nul, en de 3e, 4e, 7e, 8e, 11e en 12e der vergelijkingen (48) leeren, dat λ_3 zoowel aan de tweede als aan de eerste limiet *nul* is. Wordt nu de verkregene vergelijking met betrekking tot de geheele massa genomen, dan vallen, op grond van de vergelijkingen (51), de twee eerste der integralen in het voorste lid weg; ook vervalt de term, die λ_3 tot coëfficiënt heeft, en er blijft, na omkeering der teekens,

$$\int\left(yZ\partial m-y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 yz\right)-\int\left(zY\partial m-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+2\lambda_1 yz\right)=0,$$

of

$$\int\left(yZ\partial m-zY\partial m-y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m+z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)=0,$$

waaruit dan, door afscheiding enz., de eerste der vergelijkingen (49) voortkomt, en dat de beide andere op gelijkvormige wijze verkregen worden, zal wel geen verklaring behoeven.

4. Worden alleenlijk de vergelijkingen (49) der beweging gevraagd en niet meer, dan kunnen deze ook, zonder tusschenkomst van onbepaalde vermenigvuldigers, verkregen worden op de wijze, gevolgd in art. 7 van § I. Daartoe moeten, door middel van de voorwaardes-vergelijkingen der variatiën van de onbepaalde coördinaten, de algemeene waarden van δx, δy, δz worden bepaald. Deze waarden gesubstitueerd zijnde in de vergelijking (1), zal de noodzakelijke betrekking, welke tusschen de onbepaalde variatiën moet bestaan, in rekening zijn gebragt, en de vergelijkingen der beweging zullen dan onmiddellijk moeten verkregen worden. Het aantal dezer vergelijkingen is drie; de vraag rijst derhalve, hoe deze drie uit de enkele vergelijking (1) ontstaan? Men merke op dat, om δx, δy, δz te vinden, de vergelijkingen (42) en (43), in verband met (41), zullen moeten worden geïntegreerd. Hierdoor worden er willekeurige standvastige grootheden ingevoerd, die, van dezelfde orde moetende zijn als de te bepalen elementen δx, δy, δz, als variatiën, en wel als willekeurige en daarom onderling onafhankelijke variatiën,

zullen mogen en moeten beschouwd worden. Het aantal dier willekeurige standvastige grootheden zal blijken *drie* te zijn. De vergelijking (1) zal dienvolgens, door de substitutie der waarden van δx, δy, δz, herleid worden tot eene andere vergelijking, niet meer van onderling zamenhangende, maar van willekeurige variatiën afhangende. Al de termen van die herleide vergelijking (1) zullen eene zoodanige variatie tot factor hebben. Het vereenigen der termen, door eene zelfde willekeurige variatie vermenigvuldigd, zal drie sommen van termen opleveren. En de herleidé vergelijking gelijk *nul* moetende zijn, onafhankelijk van elke waarde aan de willekeurige variatiën toe te kennen, zal er alleenlijk, met betrekking tot hetgeen men zoekt, voldaan kunnen worden door elke der drie sommen van termen gelijk *nul* te stellen; daaruit komen dan de drie vergelijkingen der beweging.

Laat, tot meerdere eenvoudigheid en duidelijkheid, δx, δy, δz aangeduid en vervangen worden door u, v, w, dan zijn de vergelijkingen (41), (42), (43), ter bepaling van u, v, w, deze:

$$xu + yv + zw = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\partial x \partial u + \partial y \partial v + \partial z \partial w = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

$$\partial^2 x \partial^2 u + \partial^2 y \partial^2 v + \partial^2 z \partial^2 w = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

De elementen, in deze vergelijkingen voorkomende, hebben alleenlijk betrekking tot coördinaten van punten der massa. De differentiaal van den tijd, welke in de differentiaal-vergelijkingen der beweging het onafhankelijk veranderlijk element is, komt hier in geen aanmerking. Daarom zou, voor het meer gemakkelijk integreren, eene der eerste differentialen, b. v. ∂x, als standvastig mogen aangenomen worden. Dit worde evenwel niet gedaan, zoodat dan ook de vergelijkingen (α), (β), (γ) den meer algemeenen vorm blijven behouden, onder welken zij ten opzigte van al hunne elementen x, y, z, u, v, w, ∂x, ∂y .... volkomen symmetrisch zijn.

De differentiaal van de vergelijking (α) is

$$x\partial u + u\partial x + y\partial v + v\partial y + z\partial w + w\partial z = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

Wederom differentiërende, en op de betrekking (β) lettende, komt:

$$x\partial^2 u + u\partial^2 x + y\partial^2 v + v\partial^2 y + z\partial^2 w + w\partial^2 z = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\epsilon)$$

Uit (α), (β), (δ) w en ∂w eliminerende, zal verkregen worden:

$$(x\partial z - z\partial x)(z\partial u - u\partial z) + (y\partial z - z\partial y)(z\partial v - v\partial z) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (\theta)$$

Eveneens, door eliminatie van w en $\partial^2 w$ uit (α), (γ), (ϵ),

$$(x\partial^2 z - z\partial^2 x)(z\partial^2 u - u\partial^2 z) + (y\partial^2 z - z\partial^2 y)(z\partial^2 v - v\partial^2 z) = 0. \;.\;.\;.\; (\zeta)$$

Klaarblijkelijk hebben deze twee vergelijkingen (θ) en (ζ) den vorm

$$P.Q + R.S = 0, \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\iota)$$

$$\partial P.\partial Q + \partial R.\partial S = 0. \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\varkappa)$$

Zij hebben derhalve, ten opzigte van *vier* functiën, denzelfden vorm als de vergelijkingen (α), (β), ten opzigte van *zes* elementen, zoodat van de *drie* symmetrische vergelijkingen (α), (β), (γ) met *zes* veranderlijke grootheden als ware het is afgedaald tot *twee* symmetrische vergelijkingen met *vier* veranderlijke functiën, en uit deze twee komt men nu eveneens tot enkele vergelijkingen met *twee* van die veranderlijke functiën. Want uit de differentiaal van (ι), dat is uit

$$P\partial Q + Q\partial P + R\partial S + S\partial R = 0,$$

en uit (ι) en ($\varkappa$), S en ∂S eliminerende, komt

$$R(P\partial R - R\partial P)\partial Q - Q(P\partial R - R\partial P)\partial R = 0,$$

dat is

$$(P\partial R - R\partial P)(R\partial Q - Q\partial R) = 0.$$

Dienvolgens

$$\frac{\partial P}{P} = \frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial R}{R},$$

of

$$\frac{x\partial^2 z - z\partial^2 x}{x\partial z - z\partial x} = \frac{y\partial^2 z - z\partial^2 y}{y\partial z - z\partial y} = \frac{z\partial^2 u - u\partial^2 z}{z\partial u - u\partial z},$$

en dan ook

$$\frac{z\partial^2 v - v\partial^2 z}{z\partial v - v\partial z} = \frac{x\partial^2 z - z\partial^2 x}{x\partial z - z\partial x} = \text{enz.},$$

welke vergelijkingen onmiddellijk kunnen worden geïntegreerd. Men heeft b. v., uit $\frac{\partial Q}{Q} = \frac{\partial R}{R}$, $Q = aR$, dat is

$$z\partial u - u\partial z = -a(z\partial y - y\partial z),$$

en van deze is de integraal

$$\frac{u}{z} = -a\frac{y}{z} + b; \quad \text{of} \quad u = -ay + bz,$$

zijnde *a* en *b* de willekeurige standvastige grootheden, door het integreren bijgekomen.

Men zou nu wel eveneens verkrijgen $v = -cx + dz$, maar de willekeurige standvastige grootheden kunnen niet alle onderscheiden wezen, want er moet aan de vergelijkingen (α) en (β) worden voldaan. Dit blijkt dan ook, van een anderen kant, door de gevondene eerste integraal $(z\partial u - u\partial z) = -a(z\partial y - y\partial z)$, dewijl, ingevolge deze, de vergelijking (θ) overgaat in

$$z\partial v - v\partial z = -a(x\partial z - z\partial x),$$

van welke de integraal is

$$v = ax + cz,$$

zijnde c eene derde willekeurige standvastige grootheid, voor welke het geoorloofd is te stellen $-c$, opdat de vorm der uitdrukking van waarde voor v aan die voor u gelijk zij, hetgeen, op grond der symmetrie, in de gegevene vergelijkingen ten opzigte van al de elementen bestaande, gepast is. Met $u = -ay + bz$, en $v = ax - cz$ geeft de vergelijking (α), $w = -bx + cq$. De begeerde uitkomst zal derhalve zijn (indien a, b, c gesteld worden onder den vorm van variatiën, b. v. δf, δg, δh,),

$$\delta x = -y\delta f + z\partial g, \qquad \delta y = x\delta f - z\delta h, \qquad \delta z = -x\delta g + y\delta h,$$

en met deze waarden zal dan de bepaalde vergelijking der virtuele momenten zijn:

$$\int\Big\{\Big[-y\,X\partial m + y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m + x\,Y\partial m - x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\Big]\delta f$$
$$+\Big[+z\,X\partial m - z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m - x\,Z\,\partial m + x\frac{\partial^2 z}{\partial^2 t}\partial m\Big]\delta g$$
$$+\Big[-z\,Y\partial m + z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m + y\,Z\,\partial m - y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\Big]\delta h\Big\} = 0.$$

In plaats van de enkele integraal van het geheele voorste lid dezer vergelijking, kan eene som van drie integralen van de drie termen, waaruit dat voorste lid onder het integraal-teeken bestaat, gesteld worden. Daar verder δf, δg, δh standvastig zijn en voor al de elementen der massa dezelfde waarde geacht mogen worden te hebben, zal het ook geoorloofd wezen deze grootheden vóór of buiten de integraal-uitdrukkingen te plaatsen. Alsdan zal aan de vervormde of gewijzigde vergelijking worden voldaan door de coëfficiënten van δf, δg, δh. dat is elke der drie bedoelde integralen, aan *nul* gelijk te stellen, en daaruit verkrijgt men dan terstond de drie begeerde vergelijkingen (49) der beweging.

5. De eerste leden der vergelijkingen (49) kunnen worden vervormd en herleid, zoodat zij afhangen van de hoeksnelheden of differentiale hoekbewegingen der massa om hare coördinaten-assen. De integralen zullen daarbij meer ontwikkeld kunnen worden, en indien dan, als coördinaten-assen der massa, de *hoofdassen der massa met betrekking tot het vaste punt* worden genomen, zullen de vergelijkingen (49) tot den eenvoudigsten vorm zijn gebragt, en als eerste differentiaal-vergelijkingen der beweging van het ligchaam om het vaste punt kunnen aangemerkt worden.

Laten p, q, r in rangorde aanduiden de grootten der hoeksnelheden van beweging der massa om of met betrekking tot de assen der coördinaten x, y, z. Eenig element hebbe tot de as der abscissen x een afstand s, zijnde $s = \sqrt{(y^2 + z^2)}$. Daar de hoeksnelheid met betrekking tot de as x is p, zal de volstrekte snelheid der draaijende beweging van het gedacht element ten opzigte van dezelfde as x zijn ps. De beweging van het element door een oneindig klein boogje van den cirkel, hebbende s tot straal, kan gedacht worden ontbonden te zijn in twee andere differentiaal-bewegingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten y en z. Deze zamenstellende bewegingen zullen in grootte zijn:

$$\textit{evenwijdig aan de as van } y, = -ps.\frac{z}{s} = -pz,$$

$$\textit{evenwijdig aan de as van } z, = +ps.\frac{y}{s} = +py.$$

Hierbij is aangenomen dat de rigting der draaijende beweging is opwaarts in het octant der positieve coördinaten $x. y, z$, zoodat de ordinaat y kleiner, maar z grooter wordt, en de beweging geschiedt als ware het van de positieve zijde der as y tot of naar de positieve rigting van de as z.

Eveneens zal eene draaijende differentiaal-beweging qs' om de coördinaten-as y, en gerigt van de positieve rigting der as z naar de positieve zijde der as van de abscissen x, ontbonden gedacht kunnen worden in twee regtlijnige differentiaal-bewegingen, evenwijdig aan de assen der coördinaten x en z, en van deze bewegingen zullen de grootten zijn:

$$\textit{evenwijdig aan de as van } x, = +qz,$$

$$\textit{evenwijdig aan de as van } z, = -qx.$$

En de cirkelvormige differentiaal-beweging rs'' van hetzelfde element met betrekking tot de as der ordinaten z, en gerigt van de positieve streek der

as van x naar de positieve zijde van de as der ordinaten y, zal insgelijks twee zamenstellende regtlijnige differentiaal-bewegingen opleveren, te weten:

de eene, *evenwijdig aan de as van* $x, = -ry$,

de andere, *evenwijdig aan de as van* $y, = +rx$.

Denkt men derhalve de draaijende differentiaal-beweging van eenig element der massa om de onbestendige as ontbonden in drie dergelijke bewegingen om de coördinaten-assen der massa, en elke dezer wederom in regtlijnige differentiaal-bewegingen evenwijdig aan de coördinaten-assen, dan zullen de totale zamenstellende regtlijnige bewegingen zijn:

evenwijdig aan de as der abscissen $x, = qz - ry$,

evenwijdig aan de as der ordinaten $y, = rx - pz$,

evenwijdig aan de as der ordinaten $z, = py - qx$.

Maar deze zijn nu niet onderscheiden van de snelheden der beweging van het element met betrekking tot de genoemde assen, zoodat men mag stellen

$$\frac{\partial x}{\partial t} = qz - ry; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = rx - pz; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = py - qx \quad \dots\dots\dots (52)$$

Hieruit zal volgen, dewijl al de bestanddeelen dezer vergelijkingen veranderlijk zijn,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= z\frac{\partial q}{\partial t} - y\frac{\partial r}{\partial t} + q(py - qx) - r(rx - pz), \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= x\frac{\partial r}{\partial t} - z\frac{\partial p}{\partial t} + r(qz - ry) - p(py - qx), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= y\frac{\partial p}{\partial t} - x\frac{\partial q}{\partial t} + p(rx - pz) - q(qz - ry). \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (53)$$

Deze uitdrukkingen moeten nu gesubstitueerd worden in de eerste leden der vergelijkingen (49). Laat dit b. v. geschieden in de eerste van die vergelijkingen, dan wordt zij

$$\int \left\{ \frac{\partial p}{\partial t}(y^2 + z^2)\partial m - \frac{\partial q}{\partial t} xy\,\partial m - \frac{\partial r}{\partial t} xz\,\partial m + qr(y^2 - z^2)\partial m - (q^2 - r^2)yz\,\partial m \right.$$
$$\left. + prxy\,\partial m - pqxz\,\partial m \right\} = \int (yZ\,\partial m - zY\,\partial m).$$

De hoeksnelheden en hare veranderingen, dat is de hoekversnellingen,

zijn voor al de elementen der massa dezelfde. Derhalve moeten zij, bij het nemen der integraal of wel der integralen van de termen des eersten lids over de geheele massa, als standvastig worden aangemerkt. Neemt men tevens die lijnen als coördinaten-assen der massa, welke zijn de ***hoofdassen der massa voor of met betrekking tot het vaste punt***, dan worden de integralen der termen, die van de producten $xy\partial m$, $xz\partial m$, $yz\partial m$ afhangen, ***nul***, en de vergelijking gaat over in

$$\frac{\partial p}{\partial t}\int(y^2+z^2)\partial m - qr\int(z^2-y^2)\partial m = \int(yZ\partial m - zY\partial m).$$

De grootte der momenten van traagheid der massa met betrekking tot de opgenoemde hoofdassen mag, even zoo als de plaats of ligging dezer hoofdassen, als bekend of gegeven worden aangemerkt. Zijn A, B, C de grootten dezer momenten, genomen in de orde der coördinaten x, y, z, dan is

$$\int(y^2+z^2)\partial m = \text{A},\ \int(x^2+z^2)\partial m = \text{B},\ \int(x^2+y^2)\partial m = \text{C};$$

derhalve ook

$$\int(z^2-y^2)\partial m = (\text{B}-\text{C}).$$

Het tweede lid der onderwerpelijke vergelijking van de beweging der massa, drukt klaarblijkelijk uit het moment van een koppel van draaijende beweging om de as der abscissen x, namelijk van een koppel gelijk aan de som van al de koppels, loodregt op de as van x, en ontstaan uit de werkingen der krachten $X\partial m$, $Y\partial m$, $Z\partial m$ op de elementen der massa. Wordt de grootte of het moment van dit totale koppel aangeduid door L, dan zal de herleide eerste vergelijking der draaijende beweging van het vast ligchaam zijn

$$\text{A}\frac{\partial p}{\partial t} - (\text{B}-\text{C})\,qr = \text{L}.$$

De beide andere vergelijkingen kunnen op gelijkvormige wijze herleid worden, en wanneer M en N beteekenen de momenten der koppels, welke eene draaijende beweging aan het ligchaam om de coördinaten-assen y en z zouden kunnen mededeelen, gelijk aan die welke al de op de elementen werkende krachten gezamenlijk pogen te doen ontstaan, — of ook, en juister, gelijk aan die, welke men zal moeten verkrijgen door het ontbinden der eigenlijke koppels van beweging des ligchaams om de onbestendige as, — zullen

in plaats van de drie vergelijkingen (49) deze drie andere herleide en meer eenvoudige vergelijkingen komen:

$$\left.\begin{aligned} A\frac{\partial p}{\partial t} &= (B-C)\,qr + L,\\ B\frac{\partial q}{\partial t} &= (C-A)\,pr + M,\\ C\frac{\partial r}{\partial t} &= (A-B)\,pq + N. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (54)$$

Zij zijn de bekende vergelijkingen der beweging van een vast ligchaam om een vast punt; zij hebben den vorm van differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde, die gelijktijdig bestaan, en zij zijn daarom eerste differentiaal-vergelijkingen der beweging van het ligchaam. Door het integreren worden p, q, r in functie van den tijd bekend, en drie andere vergelijkingen, welker afleiding of vorming niet tot het onderwerp dezer Bijdrage behoort, dienen daarna om, met de waarden van p, q, r voor eenig oogenblik, de stelling der hoofdassen, gaande door het vaste punt, met betrekking tot de vaste coördinaten-assen te vinden. Daarmede zal het voorstel, voor zoo ver de beweging aangaat, opgelost zijn.

6. Ter bepaling van de hoegrootheid der drukking, door de werking der krachten en ten gevolge der beweging op het vaste punt uitgeoefend, heeft men *vooreerst* uit de vergelijkingen (45), (46), (47),

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2x}\left\{X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right]\right\}\\ &= -\frac{1}{2y}\left\{Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right]\right\}\\ &= -\frac{1}{2z}\left\{Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial^2 t}\,\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Ten *anderen* is, door de vergelijking (40),

$$U_1 = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial L_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial z}\right)^2\right\}} = \pm\,2\varrho.$$

Derhalve komt voor de drukking $\lambda_1 U_1$ of d_ρ, uitgeoefend op het element ∂m in de normale rigting op de baan, door dit element om het vaste punt

beschreven, en dan ook uitgeoefend op het vaste punt zelve in de rigting van den voerstraal ϱ,

$$\mathrm{d}_\rho = \frac{\varrho}{x}\left\{X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right]\right\}$$

$$= \frac{\varrho}{y}\left\{Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right]\right\}$$

$$= \frac{\varrho}{z}\left\{Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right]\right\}.$$

Hieruit onmiddellijk

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}_x &= X\,\partial m - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\right],\\ \mathrm{d}_y &= Y\,\partial m - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\right],\\ \mathrm{d}_z &= Z\,\partial m - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m - 2\partial\left[\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\right], \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (55)$$

De drukking d_ρ bestaat oorspronkelijk op het element ∂m; vermits hare rigting is die van den voerstraal ϱ, kan zij ook gedacht worden als uitgeoefend tegen het vaste punt, en dan zijn d_x, d_y, d_z de drukkingen (met betrekking tot een enkel element, verbonden met de onmiddellijk aansluitende), uitgeoefend tegen het vaste punt in de rigting der coördinaten-assen. Men kan evenwel de drukking d_ρ op eenig element eerst, ter plaatse van dit element, ontbonden denken in de drukkingen d_x, d_y, d_z evenwijdig aan de coördinaten-assen, en ze alsdan overbrengen op of langs deze assen, maar dan ontstaan er tevens drie koppels k_x, k_y, k_z, loodregt op de coördinaten-assen. De uitdrukkingen der momenten van deze koppels zijn:

$$\left.\begin{aligned} k_x &= y\,\mathrm{d}_z - z\,\mathrm{d}_y = (y\,Z\,\partial m - z\,Y\,\partial m) - \left(y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)\partial m - \\ &\qquad - 2y\,\partial\{\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\} + 2z\,\partial\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\},\\ k_y &= z\,\mathrm{d}_x - x\,\mathrm{d}_z = (z\,X\,\partial m - x\,Z\,\partial m) - \left(z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)\partial m - \\ &\qquad - 2z\,\partial\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\} + 2x\,\partial\{\lambda_2\,\partial z - \partial(\lambda_3\,\partial^2 z)\},\\ k_z &= x\,\mathrm{d}_y - y\,\mathrm{d}_x = (x\,Y\,\partial m - y\,X\,\partial m) - \left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)\partial m - \\ &\qquad - 2x\,\partial\{\lambda_2\,\partial y - \partial(\lambda_3\,\partial^2 y)\} + 2y\,\partial\{\lambda_2\,\partial x - \partial(\lambda_3\,\partial^2 x)\}. \end{aligned}\right\} \ldots (56)$$

Deze koppels, voor al de elementen te zamen genomen, zouden zijn koppels van drukkingen, indien de beweging der massa om de coördinaten-assen niet kon plaats grijpen. Maar terwijl een zelfde punt der massa voorwaardelijk in het vaste punt blijft of van plaats niet verandert, is de beweging der massa om elke van hare coördinaten-assen onbelemmerd of niet meer belemmerd. Daarom zijn de genoemde totale koppels van drukkingen *nul*, en de integralen (over de geheele massa genomen) der tweede leden van de vergelijkingen (56) moeten dienvolgens, aan *nul* gelijk gesteld zijnde, wederom de vergelijkingen (49) der beweging opleveren. Het zal voldoende zijn dit voor één der vergelijkingen (56) aan te toonen, b. v. voor de eerste dezer vergelijkingen. Bestonden in deze vergelijking de *derde* en *vierde* termen niet, dan zou de integraal, over de geheele massa uitgestrekt, en het eerste lid van de vergelijking gelijk nul gesteld, inderdaad van de eerste der vergelijkingen (49) niet onderscheiden zijn. Derhalve moet slechts blijken, dat de integraal der som van die derde en vierde termen *nul* is, als zij over de geheele massa wordt genomen. De onbepaalde integraal is

$$\int 2y\partial\{\lambda_2\partial z-\partial(\lambda_3\partial^2 z)\}-\int 2z\partial\{\lambda_2\partial y-\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}=2y\{\lambda_2\partial z-\partial(\lambda_3\partial^2 z)\}$$
$$-2z\{\lambda_2\partial y-\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}+2\int\{\partial y\partial(\lambda_3\partial^2 z)-\partial z\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}.$$

Tusschen de limieten der massa genomen zijnde, zal de waarde van het eerste lid gelijk zijn aan den derden term van het tweede lid, tusschen dezelfde grenzen genomen; want volgens de vergelijkingen (48) zullen, aan deze grenzen, de eerste en de tweede termen van het tweede lid *nul* worden. De ontwikkeling van den derden term geeft, zonder nog op de limieten te letten,

$$2\int\{\partial y\partial(\lambda_3\partial^2 z)-\partial z\partial(\lambda_3\partial^2 y)\}=2\lambda_3(\partial y\partial^2 z-\partial z\partial^2 y),$$

en vermits aan de limieten λ_3 gelijk *nul* is, (of eigenlijk $\lambda_3\partial^2 y=0$ en $\lambda_3\partial^2 z=0$, volgens (48)), zal de bepaalde integraal insgelijks *nul* zijn *.

Worden de tweede leden van de vergelijkingen (55) over de geheele massa

* Op het hier ontwikkelde is door den Heer STAMKART eene aanmerking gemaakt in denzelfden zin als op het behandelde in § I, art. 9, en met aanduiding eener soortgelijke bekorting in de berekening.

genomen (te weten door integreren), dan zullen, op grond van de vergelijkingen (48), de integralen van de derde termen dier leden wegvallen, en voor de totale zamenstellende drukkingen tegen het vaste punt verkrijgt men

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X\partial m - \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m, \\ D_y &= \int Y\partial m - \int \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m, \\ D_z &= \int Z\partial m - \int \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

hebbende de integralen, alhoewel zonder bepaalde aanduiding, betrekking tot de geheele massa. Integreert men nu in dezen zin de tweede leden van de vergelijkingen (53), en substitueert men de uitkomsten in de tweede leden van de pas verkregene vergelijkingen, dan zal er, als x_1, y_1, z_1 zijn de coördinaten van het zwaartepunt der massa, komen:

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X\partial m + (q^2+r^2)mx_1 - pqmy_1 - prmz_1 + \frac{\partial r}{\partial t}my_1 - \frac{\partial q}{\partial t}mz_1; \\ D_y &= \int Y\partial m + (p^2+r^2)my_1 - qpmx_1 - qrmz_1 + \frac{\partial p}{\partial t}mz_1 - \frac{\partial r}{\partial t}mx_1; \\ D_z &= \int Z\partial m + (p^2+q^2)mz_1 - rpmx_1 - rqmy_1 + \frac{\partial q}{\partial t}mx_1 - \frac{\partial p}{\partial t}my_1. \end{aligned}\right\} .(57)$$

Bijaldien derhalve geen krachten op de elementen van het ligchaam blijven werken, en dat het zwaartepunt is het vaste punt, zal dit punt gedurende de beweging niet gedrukt worden.

Zijn twee der hoeksnelheden *nul*, b. v. p en q, dan bestaat er slechts draaijende beweging om de as der ordinaten z, even alsof deze eene vaste as van omwenteling ware, en de vergelijkingen (57) zullen, gelijk behoort, overgaan in de vroeger verkregene vergelijkingen (54) en (56).

7. De vergelijkingen (57) kunnen tot een anderen vorm worden herleid, overeenkomende met dien van de vergelijkingen (54), en onder welken de termen der tweede leden eene meer bepaalde beteekenis hebben. Zij b. v. de eerste der vergelijkingen (57). Het vereenigde van de tweede, derde en vierde termen van het tweede lid kan aldus worden voorgesteld:

$$(q^2+r^2)mx_1 - pqmy_1 - prmz_1 = (p^2+q^2+r^2)mx_1 - p(px_1+qy_1+rz_1)m.$$

p, q, r zijn de hoeksnelheden der draaijende beweging met betrekking tot de coördinaten-assen der massa. Wordt de hoeksnelheid der werkelijke beweging om de onbestendige as aangeduid door ω, dan zal, gelijk bekend is, of hetgeen als bekend mag aangenomen worden (zoo noodig, zou het ook door middel van de vergelijkingen (52) ligtelijk blijken), $p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$ zijn. Ook zullen $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}, \frac{r}{\omega}$ wezen de uitdrukkingen van grootte der *cosinussen* van de hoeken tusschen de rigtingen van de onbestendige as en der coördinaten-assen van de massa. Daarom zal dan de projectie van den voerstraal ϱ_1 des zwaartepunts op de onbestendige as eene grootte hebben $= \left(\frac{p}{\omega} x_1 + \frac{q}{\omega} y_1 + \frac{r}{\omega} z_1\right)$. En deze projectie nu projecterende op de as der abscissen x, komt voor de abscis ξ_1 van het voetpunt der loodlijn, uit het zwaartepunt op de onbestendige as nedergelaten,

$$\xi_1 = \frac{p}{\omega}\left(\frac{p}{\omega} x_1 + \frac{q}{\omega} y_1 + \frac{r}{\omega} z_1\right),$$

zoodat dan

$$(p^2 + q^2 + r^2) m x_1 - p(p x_1 + q y_1 + r z_1) m = \omega^2 m x_1 - \omega^2 m \xi_1 = \omega^2 m (x_1 - \xi_1)$$

zal zijn. Eveneens zal, indien η_1 en ζ_1 zijn de twee andere coördinaten van het voetpunt der pasgenoemde loodlijn, gevonden worden,

$$(p^2 + r^2) m y_1 - q p m x_1 - q r m z_1 = \omega^2 m (y_1 - \eta_1),$$
$$(p^2 + q^2) m z_1 - r p m x_1 - r q m y_1 = \omega^2 m (z_1 - \zeta_1).$$

De vergelijkingen (57) zullen dienvolgens overgaan in deze:

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \int X \partial m + \omega^2 m (x_1 - \xi_1) + m\left(\frac{\partial r}{\partial t} y_1 - \frac{\partial q}{\partial t} z_1\right), \\ D_y &= \int Y \partial m + \omega^2 m (y_1 - \eta_1) + m\left(\frac{\partial p}{\partial t} z_1 - \frac{\partial r}{\partial t} x_1\right), \\ D_z &= \int Z \partial m + \omega^2 m (z_1 - \zeta_1) + m\left(\frac{\partial q}{\partial t} x_1 - \frac{\partial p}{\partial t} y_1\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (58)$$

Deze vergelijkingen hebben denzelfden vorm als de vergelijkingen (34), en de overeenkomstige termen der tweede leden hebben eene gelijke beteekenis. Elke term is de uitdrukking der grootte van een zeker gedeelte der uitgeoefende zamenstellende drukkingen. De *eerste* termen geven de aandeelen der drukkingen, te weeg gebragt door al de versnellende krachten. Door de

draaijende beweging van het ligchaam ontstaan middelpuntsvliedende krachten, die onophoudelijk in grootte veranderen; deze drukken de onbestendige as en veroorzaken hare gedurige zwenking; maar zij oefenen dan ook drukking tegen het vaste punt uit; en van de grootte der hieruit afgeleide zamenstellende drukkingen zijn de *tweede* termen de uitdrukkingen. En de *derde* termen hebben betrekking tot de zamenstellende drukkingen, voortkomende uit de verandering of aangroeijing der hoeveelheden beweging van de elementen der massa.

Niet ongepast is het, hier ter plaatse op te merken of te herinneren, dat de termen van de differentiaal-vergelijkingen (54) der beweging, of die der uitdrukkingen van de aan nul gelijk gestelde totale koppels van drukkingen (uit de vergelijkingen (56) af te leiden), eene gelijkvormige beteekenis hebben. Terstond blijkt toch, dat de eerste leden, of de enkele termen die de eerste leden der vergelijkingen (54) zijn, als uitdrukkende producten van traagheidsmomenten en hoekversnellingen, gehouden kunnen worden te zijn rekenkundige voorstellingen van zamenstellende hoeveelheden versnellende beweging om de coördinaten-assen der massa; zij zijn dan ook uitdrukkingen der momenten van koppels van versnellende krachten, de zamenstellende zijnde van die, welke aan de elementen der massa, indien zij vrij waren, dezelfde differentiaal-beweging om de onbestendige as zouden mededeelen als die zij werkelijk hebben. Eveneens duiden de laatste termen der tweede leden de grootten of momenten aan van de zamenstellende koppels der werkende of versnellende krachten. En de zamenstellende koppels der ontwikkelde middelpuntsvliedende krachten hebben eene grootte, van welke de eerste termen der tweede leden de uitdrukkingen zijn. Dit laatste blijkt wel niet bij een blootelijk inzien van de vergelijkingen (54), maar de berekening, die tot deze uitkomst voert, is niet ingewikkeld. Men denke namelijk uit eenig element ∂m eene loodlijn l op de onbestendige as, en noeme de coördinaten van het voetpunt dezer loodlijn ξ, η, ζ. De drukking tegen de onbestendige as, veroorzaakt door de middelpuntsvliedende kracht van ∂m, zal $= \partial m\, l \omega^2$ zijn. ξ, η en ζ zijn bekend door uitdrukkingen, gelijkvormig aan die, welke hier boven voor ξ_1, η_1, ζ_1, zijn gevonden of aangewezen. $(x-\xi)$, $(y-\eta)$, $(z-\zeta)$ zijn derhalve mede bekend, en men vindt dan ook de uitdrukking voor l, van welke $(x-\xi)$, $(y-\eta)$, $(z-\zeta)$ de projectiën zijn. Hierdoor komt men tot de uitdrukkingen voor de zamenstellende drukkingen, evenwijdig aan de coördinaten-assen der massa. Verder tot die der koppels lood-

regt op deze assen. En deze koppels alsdan over de geheele massa nemende, tevens daarop lettende, dat de coördinaten-assen zijn hoofdassen, zullen de grootten der totale zamenstellende hier bedoelde koppels blijken te zijn: $(B-C)\,qr$, $(C-A)\,pr$ en $(A-B)\,pq$. Men kan ook vergelijken: Poinsot, *Nouvelle Théorie de la rotation des corps*, 2e partie, art. 73—76; en Briot, *Thèse sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe* (*Journal de mathématiques pures et appliquées, par* Liouville, Tome VII, p. 74).

De vergelijkingen (58) gaan wederom over in (54) als p en q nul zijn; want de hoofdas z alsdan omwentelings-as zijnde, worden ξ_1 en η_1 *nul*, en daar ζ_1 alsdan $= z_1$ is, wordt ook $(z_1-\zeta_1) = 0$.

De enkele of zamengestelde drukking D_ρ op het vaste punt zal nu, zoo in rigting als in grootte, uit de zamenstellende drukkingen D_x, D_y, D_z bekend zijn. De algemeene uitdrukking of formule, welke de waarde van D_ρ geeft, is echter niet eenvoudig, en zij leert ook niets belangrijks.

8. Werken geen krachten onafgebroken op de elementen der massa, maar is het ligchaam in beweging gebragt door eene enkele kracht P', welke daarna heeft opgehouden te werken, dan kunnen grootte en rigting der drukking, hierbij op het vaste punt uitgeoefend, mede door de gevondene formulen worden bepaald. Want de beweegkracht P' in grootte, rigting en plaats van werking bekend zijnde, kent men ook de krachten X', Y', Z', waarin P', evenwijdig aan de coördinaten-assen der massa, is ontbonden, alsmede de koppels L', M', N', loodregt op deze assen, en bij de krachten X', Y', Z' moetende komen, als deze gedacht worden in of langs de coördinaten-assen op het vaste punt te zijn overgebragt. Bij het begin der beweging zijn p, q, r *nul*, maar er worden hoeksnelheden geboren, er zijn aanvankelijke hoeksnelheden p', q', r', en deze zijn bepaald door de formulen

$$p' = \frac{L'}{A}, \quad q' = \frac{M'}{B}, \quad r' = \frac{N'}{C}.$$

Dit volgt niet alleenlijk uit het toepassen van den regel, welke de hoeksnelheid der draaijende beweging eener massa leert vinden, als haar moment van traagheid ten opzigte van de omwentelings-as, gelijk ook het moment der bewegende kracht, of dat van het koppel bewegende krachten, met betrekking tot dezelfde as, gegeven zijn, maar het volgt ook uit de differentiaalvergelijkingen (54) der beweging, indien namelijk p, q, r *nul* worden gesteld,

en L', M', N' in plaats van L, M, N. Want dan zullen ook de hoekversnellingen $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}$, niet onderscheiden wezen van de geboren wordende of aanvankelijke hoeksnelheden p', q', r'.

De drukkingen, uitgeoefend op het vaste punt in de rigting der coördinaten-assen op het oogenblik van de mededeeling der beweging, zullen derhalve bekend worden door de formulen (57) als men stelt p, q, r *nul*, of door de formulen (58) als ω *nul* gesteld wordt, mits ook in deze of in gene formulen X', Y', Z' substituerende in plaats van $\int X\partial m$, $\int Y\partial m$, $\int Z\partial m$, en p', q', r' voor $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}$. Er komt dan

$$\left.\begin{aligned} D'_x &= X' + m\,(r'y_1 - q'z_1), \\ D'_y &= Y' + m\,(p'z_1 - r'x_1), \\ D'_z &= Z' + m\,(q'x_1 - p'y_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

Is de plaats van het vaste punt tevens die van het zwaartepunt der massa, dan zijn de zamenstellende drukkingen eeniglijk X', Y', Z', en de enkele of zamengestelde drukking is juist gelijk aan die, welke de beweegkracht P' zou hebben uitgeoefend, indien zij, evenwijdig aan hare oorspronkelijke rigting, onmiddellijk op het vaste punt gewerkt hadde.

De koppels van drukkingen moeten, gelijk onder de beweging, zoo ook bij den aanvang der beweging, *nul* zijn. Noemt men a, b, c de coördinaten van het punt, waarop de kracht P' onmiddellijk heeft gewerkt (alswanneer $L' = Z'b - Y'c$, $M' = X'c - Z'a$, $N' = Y'a - X'b$ zal zijn), en neemt men, na in de vergelijking (56) de uitdrukkingen voor de tweede differentiaal-verhoudingen (55) te hebben gesubstitueerd, de integralen van de tweede leden dier vergelijkingen met betrekking tot den aanvang der beweging, — terwijl de eerste leden nul zijn, — dan zal er komen, zoo als behoort,

$$0 = L' - Ap'; \quad 0 = M' - Bq'; \quad 0 = N' - Cr'.$$

9. Is het zwaartepunt niet in het vaste punt, en werken er geen krachten op de elementen der massa, dan kan de beweging eene zoodanige wezen, dat is medegedeeld door eene kracht, in zoodanige streek en op een zoodanig gelegen punt gewerkt hebbende, dat het vaste punt niet gedrukt noch gebotst is geworden, zoodat dan ook, als dit punt niet vast maar

vrij ware, de aanvankelijke draaijende beweging van het ligchaam geen andere zou wezen dan die er werkelijk geboren wordt terwijl het punt vast is. Derhalve moeten, als dit plaats heeft of plaats zal hebben, de tweede leden der vergelijkingen (59) gelijk *nul* zijn, waaruit deze voorwaarden volgen:

$$\left.\begin{aligned} X' &= m(q'z_1 - r'y_1), \\ Y' &= m(r'x_1 - p'z_1), \\ Z' &= m(p'y_1 - q'x_1). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Hieruit worden terstond deze vergelijkingen afgeleid:

$$\left.\begin{aligned} X'x_1 + Y'y_1 + Z'z_1 &= 0, \\ X'p' + Y'q' + Z'r' &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

door welke blijkt, dat de rigting der kracht P' moet zijn *én* loodregt op de rigting van den voerstraal ϱ des zwaartepunts van het ligchaam, *én* loodregt op de rigting der as om welke de beweging aanvangt, en daarom loodregt op het vlak, gaande door het zwaartepunt en de rigting der aanvankelijke omwentelings-as. Gevolgelijk moet deze as eene *vrije* as van omwenteling zijn, en inderdaad, als in de tweede der vergelijkingen (61) de waarden $\frac{L'}{A}, \frac{M'}{B}, \frac{N'}{C}$ der hoeksnelheden p', q', r' worden gesubstitueerd, komt er

$$\frac{X'L'}{A} + \frac{Y'M'}{B} + \frac{Z'N'}{C} = 0,$$

zijnde de betrekking door welke de drie vergelijkingen (60) zamenhangen, maar tevens ook de uitdrukking der bekende voorwaarde voor het bestaan eener zoogenaamde ***vrijwillige omwentelings-as.***

De vergelijkingen (60) zijn vergelijkingen eener regte lijn, hebbende x_1, y_1, z_1, tot doorloopende coördinaten van hare punten. Zij is de meetkundige plaats der punten, in welke of alwaar het zwaartepunt des ligchaams kan zijn, opdat het middelpunt van beweging (het vaste punt) geen drukking noch schok lijde. En de lijn, evenwijdig aan de genoemde door het vaste punt gerigt, zal dan ook zijn de plaats der punten, die aangenomen kunnen worden als middelpunten van beweging, waarop, bij de mededeeling der beweging, geen drukking noch schok zal uitgeoefend worden. Deze lijn kan derhalve geen andere wezen dan de lijn of as, om welke de

beweging aanvangt. De vergelijkingen dezer aanvankelijke as zijn klaarblijkelijk

$$q'z - r'y = 0, \quad r'x - p'z = 0, \quad p'y - q'x = 0, \dots\dots\dots (62)$$

en zij zijn hier de vergelijkingen eener as, gaande door een middelpunt van beweging, dat niet vast behoeft te zijn. Maar zoo dit middelpunt gedrukt werd, en daarom niet vrij kon wezen, zouden deze vergelijkingen niettemin zijn de vergelijkingen der rigting van de omwentelings-as voor eenig oogenblik. En werkelijk zijn ook de vergelijkingen der onbestendige assen van omwenteling, bij de beweging van een vast ligchaam om een vast punt, onder de vorenstaande vormen bekend.

10. Opdat dan het vaste punt niet gedrukt of gebotst worde, of opdat de aanvankelijke omwentelings-as geen drukking lijde, moet de rigting der kracht loodregt zijn op het vlak, gaande door deze aanvankelijke as en het zwaartepunt des ligchaams. Maar hiermede is noch de rigting der as bekend, noch de rigting der kracht genoegzaam bepaald. Beide deze rigtingen moeten evenwel een regten hoek maken, en men kan stellen dat de rigting der kracht moet gelegen zijn in een vlak, loodregt op de rigting der as, dat is in het vlak, waarin ook gelegen is het element der baan, in het eerste oogenblik gevolgd door het punt, dat den indruk der kracht P' onmiddellijk ontvangt. Daar verder geen der punten van de as wordt gedrukt, zal zij, als vrije of vrijwillige as, noodwendiglijk eene hoofdas moeten zijn. Zij kan echter geen hoofdas wezen met betrekking tot het vaste punt, tenzij hare rigting mogt invallen met die van eene der aangenomene coördinaten-assen, hetgeen niet wordt verondersteld, gelijk ook voor als nog wordt uitgesloten de bijzondere veronderstelling dat het zwaartepunt zou kunnen zijn, hetzij in het vaste punt, hetzij op eene der coördinaten-assen van de massa. Maar ingevolge hetgeen voor het geval eener vaste as, welke, bij den aanvang der beweging, door eene botsende kracht niet gedrukt of geschokt zal worden, besloten is in art. 10 van § I, zal men ook mogen stellen, dat in het onderwerpelijk geval van beschouwing, de ongedrukte as eene hoofdas zal moeten zijn met betrekking tot het punt van doorsnijding met het vlak, waarin de rigting der kracht is gelegen. De vraag is derhalve alleenlijk: kan er eene lijn aangewezen worden, getrokken door het vaste punt, en onderscheiden van elke der drie hoofdassen voor dit punt, welke eene hoofdas zal wezen met betrekking tot één van hare punten?

Uit de theorie der hoofdassen van ligchamen kan men besluiten, dat de begeerde lijn niet zal kunnen gaan door het zwaartepunt. Maar uit deze zelfde theorie is ook bekend, dat elke lijn evenwijdig gerigt aan eene der hoofdassen gaande door het zwaartepunt (voorname hoofdassen), eene hoofdas zal zijn voor het punt, waarin zij het vlak der beide andere voorname hoofdassen snijdt, zoodat dan ook in dit vlak de beide andere hoofdassen voor dat punt zullen gelegen zijn *. De rigtingen der voorname hoofdassen kunnen

* De hier uitgedrukte stelling is onbeperkt waar. Wordt ergens in een der vlakken van de drie paren voorname hoofdassen (en, in het algemeen, niet in eene dezer assen zelve) een punt gedacht of gegeven, en wordt gevraagd, hoe de hoofdassen, tot dit punt behoorende, zullen gerigt zijn, dan is het altijd waar, dat eene lijn, door het punt evenwijdig aan de derde hoofdas getrokken, de rigting eener hoofdas voor het gegeven punt zal wezen, en dat daarom de rigtingen der beide andere hoofdassen zullen zijn in het voorname hoofdvlak, waarin het punt ligt. Niettemin is het juister of meer algemeen te stellen, dat eerstgenoemde lijn de rigting eener hoofdas voor het gegeven punt *zal kunnen wezen*, of als de rigting van eene der drie hoofdassen voor het punt *kan* aangenomen worden. Want alhoewel met zoodanige lijn aan den eisch wordt voldaan, kan het ook gebeuren, dat andere lijnen, in andere rigtingen door het punt gaande, eveneens voldoen. Met andere woorden, de genoemde loodregte rigting voldoet aan den eisch, doch is niet altijd de noodzakelijke rigting voor eene der drie begeerde hoofdassen. Is het vlak, waarin het punt is genomen, dat der voorname hoofdassen van het kleinste en middelbare traagheidsmoment, dan liggen in dit vlak altijd *twee* der hoofdassen voor het gegeven punt, en de derde hoofdas is noodzakelijk evenwijdig aan de derde voorname hoofdas. Maar zoo het punt ligt in een der twee andere voorname hoofdvlakken (te weten, òf in dat der assen van het grootste en middelbare traagheidsmoment, òf in dat der assen van het grootste en kleinste traagheidsmoment, — deze momenten derhalve, in het algemeen, onderling ongelijk vooronderstellende), kan het onderscheidene bepaalde plaatsen hebben, voor welke slechts één der drie begeerde hoofdassen in dit vlak zal moeten liggen. De beide andere assen zullen dan assen van even groote traagheidsmomenten zijn, en alhoewel zij regthoekig op elkander moeten wezen, zal hare volstrekte stelling in het vlak, dat loodregt op die bedoelde eerste of ééne hoofdas is, ganschelijk onbepaald zijn. Wel is er, onder de oneindig vele paren van assen, die alsdan tweede en derde hoofdassen kunnen zijn, één paar van hetwelk één der assen gerigt is in het vlak, waarin de eerste der drie hoofdassen ligt, — zoodat dan ook de tweede as van dit eenig paar is loodregt op dat vlak of evenwijdig aan de derde voorname hoofdas, — maar dit is dan ook slechts een paar, dat *kan*, en niet een paar dat *moet* aangenomen worden. Wij weten dit uit de nasporingen van BINET (*Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des moments d'inertie des corps; Journal de l'école polytechnique*, Cahier XVI) en van AMPÈRE (*Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanents de rotation des corps; Mémoires de l'Institut*, Tome V). Men kan ook raadplegen GASCHEAU, *Remarques sur la théorie géométrique des axes permanents de rotation* (*Journal de Mathématiques, par* LIOUVILLE, 1e Série, Tome VI). Doch het belangrijkste hieromtrent is op de meest volledige wijze onderzocht en gegeven door den Heer BADON GHYBEN in het III[de] Deel van de *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*. Bij hetgene in den tekst wordt aangetoond, nopens de rigtingen van ongedrukte assen, behoeft op deze bijzondere gevallen, betrekkelijk de rig-

worden bepaald, en daarom als bekend aangemerkt, zoodra de plaats van het zwaartepunt, door de coördinaten x_1, y_1, z_1, bekend of gegeven is. Gevolgelijk zal elke der drie lijnen, die door het vaste punt evenwijdig aan de drie voorname hoofdassen, of loodregt door de drie vlakken der paren van voorname hoofdassen, kunnen getrokken worden, eene lijn zijn welke aan het begeerde kan voldoen. Elke dezer lijnen zal namelijk eene hoofdas wezen met betrekking tot het punt, waarin zij het overeenkomstig vlak van twee der voorname hoofdassen (het vlak waarop zij loodregt is) snijdt. Het vlak, gebragt door de rigting der kracht en loodregt op de rigting der ongedrukte as, zal derhalve van pasgenoemd vlak dier twee voorname hoofdassen niet onderscheiden wezen, of ook, opdat eenige der drie lijnen door het vaste punt loodregt op de vlakken der paren van voorname hoofdassen getrokken, de rigting eener aanvankelijke en ongedrukte as zij, moet de botsende kracht hare rigting hebben in hetzelfde vlak der twee voorname hoofdassen, waarop de rigting der omwentelings-as loodregt is. Daar wijders de rigting der kracht loodregt moet zijn op het vlak, gaande door de aanvankelijke as en het zwaartepunt, zal zij ook loodregt moeten zijn op de lijn, volgens welke dit vlak en dat der bedoelde twee voorname hoofdassen elkander snijden. Er blijft dan slechts nog overig te bepalen de plaats van het punt, in hetwelk deze lijn gesneden wordt door de rigting der kracht, en deze plaats zal bekend zijn door den afstand, welken de rigting der kracht moet hebben van de aanvankelijke en ongedrukte omwentelings-as.

11. Het bepalen van dien afstand is niet moeijelijk. Uit de formulen (60) merkt men ligtelijk op, dat X′, Y′, Z′, waarden hebben, gelijk aan de zamenstellende aanvankelijke hoeveelheden beweging der geheele massa, vereenigd gedacht in haar zwaartepunt. Want naar aanleiding van de formulen (52) zijn de tweede leden der formulen (60) de producten van de massa m en der zamenstellende volstrekte snelheden (bij het begin der beweging) van het zwaartepunt. Daarom zal ook P′ gelijk zijn aan de aanvankelijke hoeveelheid beweging der massa, vereenigd gedacht in haar zwaartepunt, dat is in het zwaartepunt des ligchaams. De afstand van dit zwaartepunt tot

---

tingen der hoofdassen, niet gelet te worden; zelfs kan dit, in het algemeen, in geen aanmerking komen; maar het scheen niet ongepast hier, in eene noot, van die bijzonderheden met een enkel woord te gewagen. Men kan ze ook in het breede ontwikkeld vinden in eene latere Verhandeling van den schrijver dezer Bijdragen (zie Deel XIV van de *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen*).

de aanvankelijke as zij $= d$. Deze afstand is op de lijn van doorsnijding der twee vlakken, die beide door het zwaartepunt gaan, het eerste door de ongedrukte as, het tweede loodregt op deze as. De afstand van den oorsprong der coördinaten (het vaste punt) tot het laatstgenoemd vlak, — derhalve het gedeelte der aanvankelijke as, begrepen tusschen het vaste punt en het punt voor hetwelk deze as is eene hoofdas, — zij $= \delta$, dan zal, vermits ϱ is de voerstraal van het zwaartepunt, $d^2 = \varrho_1{}^2 - \delta^2$ zijn. Is nu ω' de hoeksnelheid om de aanvankelijke en ongedrukte as, dan zal $\omega' d$ zijn de aanvankelijke volstrekte snelheid van het zwaartepunt, en daarom $m(\omega' d)$ de aanvankelijke hoeveelheid beweging der geheele massa, zoo deze, als een enkel punt, in het zwaartepunt geplaatst ware. Gevolgelijk zal

$$P' = m(\omega' d) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

moeten zijn. De formulen (60) geven oók deze uitkomst. Let men namelijk daarop, dat de som der projectiën van de coördinaten x_1, y_1, z_1 des zwaartepunts op de ongedrukte as gelijk moet zijn aan δ, en dat men derhalve zal hebben

$$\delta = x_1 \frac{p'}{\omega'} + y_1 \frac{q'}{\omega'} + z_1 \frac{r'}{\omega'},$$

dan geven de formulen (60)

$$\begin{aligned} P'^2 = X'^2 + Y'^2 + Z'^2 &= m^2 \{(q'z_1 - r'y_1)^2 + (r'x_1 - p'z_1)^2 + (p'y_1 - q'x_1)^2\} \\ &= m^2 (p'^2 + q'^2 + r'^2)(x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2) - m^2 (p'x_1 + q'y_1 + r'z_1)^2 \\ &= m^2 \omega'^2 \varrho_1{}^2 - m^2 \omega'^2 \delta^2 = m^2 \omega'^2 (\varrho_1{}^2 - \delta^2) = m^2 \omega'^2 d^2. \end{aligned}$$

Opdat nu de beweegkracht P′ het ligchaam met eene aanvankelijke hoeksnelheid ω' doe draaijen om de aanvankelijke as, zal altijd, hetzij deze as gedrukt worde hetzij niet, het moment der beweegkracht P′ gelijk moeten zijn aan het product van hoeksnelheid en moment van traagheid der massa ten opzigte van de aanvankelijke as. Weshalve, zoo μ is de grootte van dit traagheidsmoment en l de afstand tusschen de rigting der kracht en die der aanvankelijke as,

$$P'.l = \omega'\mu$$

moet zijn. Maar opdat de as niet gedrukt of gebotst worde, zal de betrekking (63) $P' = m\,\omega' d$ in rekening moeten worden gebragt, en dan zal daaruit volgen

$$l = \frac{\mu}{dm}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

zijnde, gelijk te verwachten was, de bekende formule ter bepaling der plaats van het zoogenaamd ***middelpunt van botsing,*** zoowel bij de beweging eener niet zware massa om eene vrijwillige as als om eene vaste as (§ I, art. 10). Alleenlijk is het, in deze gevallen eener geheel vrije of eener vaste as, ***in het algemeen*** niet noodzakelijk, dat de rigting der kracht gelegen zij in een vlak van voorname hoofdassen, maar hierop wordt in art. 13 nader teruggekomen.

12. Het moment $P'l$ der beweegkracht kan ook begrepen worden in den zin van grootte of moment van een koppel, welks as is de aanvankelijke as. Maar indien L', M', N' zijn, als hiervoren, de momenten der koppels, loodregt op de coördinaten-assen, ingevoerd door het ontbinden der kracht P', bij het overbrengen der zamenstellende krachten X', Y', Z' op het vaste punt, geven deze een zamengesteld koppel loodregt op de aanvankelijke as, en welks moment bepaald is door de uitdrukking

$$L' \frac{p'}{\omega'} + M' \frac{q'}{\omega'} + N' \frac{r'}{\omega'}.$$

De uitwerking van dit koppel moet klaarblijkelijk aan die der beweegkracht gelijk zijn, en daarom zal men hebben:

$$L'p' + M'q' + N'r' = Ap'^2 + Bq'^2 + Cr'^2 = P'l\omega' = \mu\omega'^2 = mk^2\omega'^2 = m(k\omega')^2, \quad (65)$$

zijnde namelijk k de grootte van den arm van het traagheidsmoment μ. Deze uitkomst geeft de grootte van de som der levendige krachten van al de elementen der massa, in beweging gebragt door eene kracht, welke daarna heeft opgehouden te werken, en het is bekend dat deze som is onveranderlijk onder de beweging. Zij zal derhalve gedurende de beweging dezelfde grootte hebben als bij den aanvang der beweging. Gevolgelijk zal $\mu\omega'^2$ of $m(k\omega')^2$ eene standvastige hoegrootheid zijn, dat is, op het eenvoudigst, het product $k\omega'$ zal voortdurend eene zelfde grootte of waarde behouden. De beteekenis hiervan is deze. Op elk oogenblik der beweging, en welke ook de rigting der onbestendige as moge wezen, zijn er punten der massa, die eene zelfde volstrekte snelheid hebben als andere punten van het ligchaam op andere oogenblikken, en deze punten zijn gelegen op lijnen, evenwijdig aan de rigting der onbestendige as voor het gedacht oogenblik, en hebbende, *in de eerste plaats,* afstanden van de onbestendige as, gelijk aan de grootte van den arm van het traagheidsmoment der massa ten opzigte van deze zelfde onbestendige

as. Dienvolgens zijn het al de punten van het regte en cirkelvormige cylindervlak, hebbende de onbestendige as tot meetkundige as, en den genoemden arm k van het traagheidsmoment tot straal van de regte doorsnede. Maar, *in de tweede plaats*, hebben dan ook, op eenig oogenblik der beweging, al die punten van het ligchaam eene zelfde volstrekte snelheid als andere punten op eenig ander oogenblik, welke, even zoo als deze andere punten, gelegen zijn in regte cirkelvormige cylindervlakken, binnen of buiten de eerstgenoemde (die $k_1, k_2, k_3 \ldots$ tot stralen van regte doorsneden hebben) beschreven, met deze dezelfde as hebbende, en alle evenveel, in meer of in minder, van deze verwijderd zijnde, zoodat de stralen der overeenkomstige cylindervlakken zullen moeten zijn *óf* alle $= k_1 + i, k_2 + i, k_3 + i, \ldots$ *óf* alle $= k_1 - i, k_2 - i, k_3 - i, \ldots$

Het standvastig zijn van het product $k\omega$ gedurende de beweging van het ligchaam (en altijd in de vooronderstelling dat er geen versnellende krachten werkzaam zijn, noch ook dat het ligchaam, na in beweging te zijn gebragt, op eenig oogenblik wordt belemmerd of op nieuw gebotst, enz.) leert ook, dat de hoeksnelheden om de opvolgende onbestendige assen in de omgekeerde reden zijn van de armen der traagheidsmomenten van de massa met betrekking tot deze assen. Wordt derhalve door het vaste punt, in eenige rigting, eene lijn gedacht of getrokken, en kan men het traagheidsmoment der massa met betrekking tot deze lijn bepalen of weten, dan zal men, kennende de grootte van k en ω voor eenig oogenblik, of kennende slechts de grootte van het product $k\omega$, ook terstond weten hoe groot de hoeksnelheid der beweging zal zijn op het oogenblik dat de gedachte of gegevene lijn onbestendige as is of zou kunnen wezen. En zoo kunnen daaruit nog andere, alhoewel minder belangrijke, gevolgen worden afgeleid. Het zal ook naauwelijks herinnerd behoeven te worden, dat het een en ander, in dit artikel opgemerkt of besloten, onafhankelijk is van het al of niet gebotst worden van de aanvankelijke omwentelingsas, zoodat het dan ook niet uitsluitend zamenhangt met hetgeen in het voorgaande artikel is behandeld.

13. Bij de algemeene beschouwingen in art. 8—11 werd vooronderstelld, dat de aanvankelijke as was *geen der drie hoofdassen,* gaande door het vaste punt, — dat de plaats van het zwaartepunt *niet* was die van het vaste punt, — dat het ook *niet* gelegen was op eene dier genoemde hoofdassen (coördinaten-assen der massa), *noch* ook in de rigting van eene der lijnen, gaande door het vaste punt en loodregt op een der vlakken van twee voorname

hoofdassen. Aangaande deze bijzondere gevallen moeten nog kortelijk eenige opmerkingen worden gemaakt.

Indien het zwaartepunt gelegen is op eene der loodlijnen, getrokken uit het vaste punt op de vlakken der paren van voorname hoofdassen, dan valt deze loodlijn klaarblijkelijk in met de rigting van de derde voorname hoofdas. De rigting van eene der voorname hoofdassen gaat derhalve door het vaste punt. Op grond van de bijzondere eigenschap, die aan de voorname hoofdassen toekomt, zal dan ook de bedoelde voorname hoofdas eene hoofdas zijn voor het vaste punt, hetgeen alleenlijk kan indien het zwaartepunt, — niet in het vaste punt zijnde, — gelegen is op eene der hoofdassen van het vaste punt, dat is op eene der coördinaten-assen. Er schijnen nogtans twee gevallen van uitzondering te bestaan, indien namelijk de traagheidsmomenten A, B, C óf alle gelijk zijn óf althans twee dezer momenten eene gelijke grootte hebben. Zijn namelijk A, B, C even groot, dan ligt het vaste punt noodwendiglijk op eene der voorname hoofdassen, en het zwaartepunt ligt dan wel op eene loodlijn, getrokken uit het vaste punt op een der drie vlakken van twee voorname hoofdassen, maar de rigting van deze loodlijn behoeft niet in te vallen met eene der drie hoofdassen voor het vaste punt, die men, uit de oneindig vele alsdan bestaande drieparen van hoofdassen, als coördinaten-assen zou hebben aangenomen. Hetzelfde heeft, ofschoon op meer beperkte wijze, plaats, indien voor twee der hoofdassen de traagheidsmomenten gelijk zijn, en dat eene der voorname hoofdassen gelegen is in het vlak dezer twee assen van even groote traagheidsmomenten; want ook in dit geval moet die voorname hoofdas door het vaste punt gaan. Maar het is niet moeijelijk om in te zien, dat deze gevallen van uitzondering als zoodanige slechts schijnbaar zijn, en dat hunne beschouwing ligtelijk teruggebragt wordt tot die van het geval, waarin het zwaartepunt gelegen is op eene der coördinaten-assen, terwijl deze zijn hoofdassen van ongelijke traagheidsmomenten. Zij b.v. het zwaartepunt gelegen op de as der ordinaten z; deze is alsdan eene voorname hoofdas, en de coördinaten van het zwaartepunt zijn $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = \zeta$. Zal deze as eene aanvankelijke omwentelingsas wezen, dan moeten, bij den aanvang der beweging, p' en q' *nul* zijn. Maar de vergelijkingen (60) geven dan, voor de onderstelling eener ongedrukte as, $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$; gevolgelijk $P' = 0$. Is nu de beweging medegedeeld door een schok, of liever door eene plotseling gewerkt hebbende kracht, dan moet deze wel gerigt zijn geweest in een vlak, loodregt op de

as z, en daarom zal Z' werkelijk *nul* zijn, maar X' en Y' kunnen niet *nul* wezen. De as zal dienvolgens ook geen ongedrukte as zijn, gelijk dit van elders bekend is en ook door de vergelijkingen (59) wordt bevestigd. De drukking, welke de as z lijdt, wordt uitgeoefend op het punt van doorsnijding dezer as met het *loodregt vlak*, waarin de kracht $P' = \sqrt{(X'^2 + Y'^2)}$ werkt. Ware de as geen voorname hoofdas, ook geen hoofdas voor het vaste punt, dan zou dit loodregt vlak door het zwaartepunt moeten gaan, bijaldien de as eene ongedrukte kon wezen. Nu de as z eene voorname hoofdas is, eene hoofdas voor al hare punten, is de plaats van genoemd loodregt vlak in zeker opzigt willekeurig. Denkt men dat het ga door het vaste punt of in te vallen met het vlak der coördinaten x en y, dan is de rigting der kracht P' in dit coördinaten-vlak, en de drukking P' zal tegen het vaste punt worden uitgeoefend. De as z zal derhalve nog wel gedrukt worden, maar deze drukking kan niet meer uitwerken dat de rigting der as bij de draaijende beweging wordt veranderd. Zij zal eene bestendige as van omwenteling zijn, vooral indien zij is de as van het grootste of van het kleinste der drie traagheidsmomenten A, B, C. Het *nul* moeten zijn van P', bijaldien de as z eene ongedrukte as kon wezen, wordt ook geleerd door de vergelijking (63); want d is nul zoo het zwaartepunt op de aanvankelijke as zelve ligt. Niettemin zijn de uitkomsten der formulen (60) en (63) juist, zoo lang er geen bepaling is gesteld, dat de beweging door de plotselinge werking eener enkele kracht P' zij medegedeeld. Want zoo hiertoe werkte een koppel van krachten, en dat de as van dit koppel ware geweest de as z, of evenwijdig aan de as z, zou werkelijk de zamengestelde kracht P' rekenkundig *nul* zijn, en de as z zou inderdaad eene aanvankelijke ongedrukte as, en, onafhankelijk hiervan, altijd ook eene bestendige as zijn. Maar hetgeen, bij het in beweging brengen van het ligchaam door de plotselinge werking eener enkele kracht P', niet mogelijk is ten aanzien van de as z, waarop het zwaartepunt verondersteld wordt te liggen, kan volkomen plaats hebben ten opzigte van elke der beide andere coördinaten-assen. Opdat er toch eene ongedrukte as zij, moet het vlak, waarin de rigting der kracht ligt, loodregt zijn op een vlak, gaande door het vaste punt en het zwaartepunt, maar tevens door eene lijn, mede door het vaste punt gaande en welke eene hoofdas voor één van hare punten zal wezen. Hieraan voldoen de vlakken xz en yz, gaande door de assen x en y, elke van welke eene hoofdas is voor het vaste punt. Zij b.v. de as y. Op deze as moet dan de

rigting der kracht loodregt zijn, maar ook het vlak, waarin deze rigting behoort gedacht te worden; tevens moet dit vlak gaan door het punt der as y, voor hetwelk deze as is hoofdas; dit punt is het vaste punt; en hieruit volgt dan dat de rigting der kracht moet zijn in het vlak xz en loodregt tegen de as z, of evenwijdig aan de as x. Dit laatste leeren ook de formulen (60). Zal namelijk de coördinaten-as y eene aanvankelijke ongedrukte as wezen of kunnen wezen, dan moeten p' en r' nul zijn, en dewijl x_1 en y_1 *nul* zijn, worden de vergelijkingen (60), $X' = mq'\zeta$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, en daarom $P' = X' = mq'\zeta$, welke waarde ook verkregen wordt door de formule (63), vermits ω' en d hier zijn q' en ζ. De afstand van de rigting der kracht P' tot de as y of wel tot het vaste punt, zal, voor het doen plaats hebben van de begeerde of uitgedrukte omstandigheid, bepaald moeten worden door de formule (64), welke geeft $l = \frac{B}{m\zeta}$.

Eveneens zal de as x, bij dezelfde voorwaarden en vooronderstellingen, eene aanvankelijke as van beweging kunnen wezen, die nergens eenige drukking, door het mededeelen der beweging, ondervindt. Maar de beweging aangevangen zijnde, hetzij om deze as, hetzij om de as y, zal om haar voortduren, vermits zij is eene hoofdas voor het vaste punt; dit zal althans moeten gebeuren, zoo het traagheidsmoment der massa ten opzigte van deze coördinaten-as niet is het middelbare der drie traagheidsmomenten A, B, C.

Ligt het zwaartepunt niet op eene der coördinaten-assen, maar in een der vlakken van twee coördinaten-assen, dan kan de derde coördinaten-as, loodregt op dit vlak, ongedrukte aanvankelijke as van omwenteling wezen. Daartoe moet dan de rigting der botsende kracht mede in hetzelfde coördinatenvlak zijn; maar het is niet noodzakelijk, dat eene der voorname hoofdassen zij loodregt op dit coördinaten-vlak of evenwijdig aan de derde coördinaten-as. Ligt het zwaartepunt in een der twee andere coördinaten-vlakken, dan kan dezelfde pas bedoelde derde coördinaten-as nog eene aanvankelijke ongedrukte as van beweging zijn, maar dan is het noodzakelijk dat geen der voorname hoofdassen zij evenwijdig aan deze coördinaten-as. De bewegende kracht moet hare rigting hebben in het coördinaten-vlak, waarop de genoemde derde coördinaten-as loodregt is, en die rigting moet tevens loodregt zijn op het coördinaten-vlak, waarin het zwaartepunt ligt. In dit geval zal derhalve het vlak van de rigting der kracht *niet* gaan door het zwaartepunt, gelijk in de andere gevallen, tot hiertoe overwogen, bleek noodzakelijk te zijn. En zoo-

danig geval van uitzondering bestaat ook, als het zwaartepunt heeft eene plaats naar welgevallen buiten de coördinaten-vlakken, mits de vorname hoofdassen niet zijn loodregt op de coördinaten-vlakken, hetgeen ook, zelfs voor eene enkele dezer hoofdassen, niet mogelijk is, bij eene geheel willekeurige stelling van het zwaartepunt. En zoo dan dit punt ergens buiten de coördinaten-vlakken is, zal elke der coördinaten-assen eene aanvankelijke en nergens gedrukte as van omwenteling kunnen wezen, indien de rigting der bewegende kracht is in het vlak der beide andere coördinaten-assen, loodregt op de lijn, getrokken door het vaste punt en door de projectie (op dat coördinaten-vlak) van het zwaartepunt, en op den afstand van het vaste punt, welken de formule (64) zal doen kennen; — b. v., voor de coördinaten-as $z, l = C : m\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)}$.

Indien, eindelijk, het zwaartepunt is in het vaste punt, en dat de vorname traagheidsmomenten onderling ongelijk zijn, zullen de coördinaten-assen invallen met de vorname hoofdassen. De formulen (60) geven voor dit geval $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$, en daarom $P' = 0$, hetgeen alleenlijk kan, zoo de beweging op eens is medegedeeld door een koppel, welks as is óf eene der coördinaten-assen, óf evenwijdig aan eene der coördinaten-assen. Deze as zal dan ongedrukte en bestendige as van beweging zijn. Is P eene botsende kracht, hebbende hare rigting in het vlak van twee der vorname hoofdassen, dan zal er wel beweging aanvangen en voortduren om de derde hoofdas, maar de botsing zal, bij het begin der beweging, door het punt der as, dat tevens het vaste punt is, moeten geleden worden.

14. Alhoewel, voor hetgeen in art. 10 is besloten, toereikende gronden zijn aangevoerd, zal eene bevestiging door middel van eerst verkregene uitkomsten, en als ware het bij toets door berekening, niet overbodig mogen geacht worden.

Zal er eene ongedrukte as wezen, om welke, bij of door het gewerkt hebben eener botsende kracht P', de beweging van het ligchaam aanvangt, — vooronderstellende de plaats van het zwaartepunt willekeurig, en de rigting van de as der beweging in het algemeen onderscheiden van die eener hoofdas, gaande door het vaste punt, — dan is in art. 9 bewezen, dat daartoe de rigting der kracht een regten hoek moet maken met de rigting der as van omwenteling, dat ook deze rigting moet zijn in een vlak loodregt op de as, maar bovendien, dat dezelfde rigting loodregt moet zijn op het vlak, gaande door de as en door het zwaartepunt, hetwelk vooronderstel moet worden buiten

de as gelegen te zijn. Wijders is het buiten twijfel, dat aan den eisch alleenlijk zal kunnen worden voldaan door eene as, welke is eene hoofdas voor een van hare punten, onderscheiden van het vaste punt. En nog mag, even zoo als in art. 10, en op grond van hetgeen in § I is gebleken, aangenomen worden, dat het vlak van de rigting der kracht, terwijl het loodregt is op de rigting der as, tevens ook de as snijde in het punt, voor hetwelk zij hoofdas is. Is de plaats van dit punt, door zijn afstand van den oorsprong der coördinaten, bekend of bekend geworden, dan is daarmede ook de plaats van het vlak van de rigting der kracht gevonden, en hetgeen dan nog te bepalen overig blijft, zal mede gevonden kunnen worden. Maar in stede van regtstreeks de plaats van genoemd punt te zoeken op de lijn, die de rigting der begeerde as zal wezen, kan men eenige lijn, gaande door het vaste punt, als rigting der begeerde as aannemen, en onderzoeken of een vlak, loodregt op deze lijn, en hebbende eenige bepaalde of bijzondere plaats, aan den eisch voldoet, te weten, dat het de lijn snijdt in een punt, voor hetwelk de lijn, beschouwd als as, eene hoofdas zal zijn. Wordt dit waar of mogelijk bevonden, dan zal, op grond van de waarheid, dat eenige willekeurig door het vaste punt gerigte lijn, zoo zij de rigting eener hoofdas kan wezen, slechts voor één enkel van hare punten hoofdas zal zijn, aan den hoofdeisch voldaan zijn, en daarmede kan worden overgegaan om het overige, dat men nog meer bepaald zou moeten weten, te vinden. Het is deze tweede weg, welke nu, *in de eerste plaats*, zal worden ingeslagen.

Het vlak, waarin de rigting der kracht moet gelegen zijn, en waaromtrent moet onderzocht worden of het aan den uitgedrukten eisch zal voldoen, hebbe die bijzondere of betrekkelijk bepaalde stelling, dat het ga door het zwaartepunt des ligchaams.

De vergelijkingen (62) zijn de vergelijkingen der aanvankelijke ongedrukte as van omwenteling. Wordt de voerstraal ϱ_1 van het zwaartepunt op deze as geprojecteerd, dan zal de grootte δ dezer projectie uitgedrukt worden door

$$\delta = \frac{1}{\omega'}(p'x_1 + q'y_1 + r'z_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

De grootte dezer projectie is tevens die van den afstand van het vaste punt tot het vlak, gaande door het zwaartepunt loodregt op de aanvankelijke as. Derhalve zal de vergelijking van dit vlak zijn

$$\frac{p'}{\omega'}x + \frac{q'}{\omega'}y + \frac{r'}{\omega'}z = \delta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

dat is

$$p'(x-x_1)+q'(y-y_1)+r'(z-z_1)=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (V)$$

Men denke door het zwaartepunt eene lijn, loodregt op dit vlak (V), dat is evenwijdig aan de rigting der aanvankelijke as. Zoo deze lijn eene hoofdas is, zal zij eene voorname hoofdas wezen, en dan zullen de twee andere voorname hoofdassen in dit vlak (V) moeten gelegen zijn. Maar dan zal ook de aanvankelijke as eene hoofdas wezen, en wel voor het punt, waarin zij het vlak (V) snijdt. Het vlak (V) zal dienvolgens het begeerde vlak zijn, het vlak door hetwelk de eisch vervuld wordt.

Om te onderzoeken of de gedachte loodlijn eene hoofdas met betrekking tot het zwaartepunt is, moet de oorsprong der coördinaten in het zwaartepunt verplaatst gedacht worden. Verder moeten, in het vlak (V), twee lijnen, elkander regthoekig in het zwaartepunt snijdende, als assen der nieuwe of andere coördinaten x' en y' worden aangenomen. Is daarbij de pas genoemde loodlijn de as der nieuwe of andere ordinaten z', dan zal, zoo deze werkelijk is eene hoofdas, de waarheid moeten blijken van deze twee vergelijkingen

$$\int x'z'\partial m=0, \quad \int y'z'\partial m=0;$$

en dit blijk zal gegeven zijn, indien aan deze vergelijkingen voldaan wordt met of als zij werkelijk identisch $0=0$ worden door de uitkomsten, in art. 8 en 9 verkregen.

De assen der coördinaten x' en y' zijn in het vlak (V). Het is hier onverschillig hoe, in dit vlak, de as x' zij gerigt. Zonder hierop te letten, neme men aan dat $\alpha, \alpha', \alpha''$ beteekenen de *cosinussen* der hoeken, welke de as der abscissen x' maakt met de oorspronkelijke coördinaten-assen x, y, z der massa. Evenzeens beteekenen β, β', β'' de *cosinussen* der hoeken, tusschen de as der ordinaten y' en de eerste coördinaten-assen x, y, z, en door $\gamma, \gamma', \gamma''$ worden aangeduid de *cosinussen* $\frac{p'}{\omega'}, \frac{q'}{\omega'}, \frac{r'}{\omega'}$ der hoeken, tusschen dezelfde oorspronkelijke assen x, y, z en de as der ordinaten z'.

Tusschen deze *negen* cosinussen bestaan bekende betrekkingen. Van deze worden hier alleenlijk gebruikt deze twee:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0,\\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0.\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

De formulen, door welke de coördinaten x', y', z' bepaald worden uit de oorspronkelijke x, y, z, terwijl, met betrekking tot het vaste punt, x_1, y_1, z_1 zijn de coördinaten van den nieuwen oorsprong, zijn

$$x' = \alpha(x - x_1) + \alpha'(y - y_1) + \alpha''(z - z_1),$$
$$y' = \beta(x - x_1) + \beta'(y - y_1) + \beta''(z - z_1),$$
$$z' = \gamma(x - x_1) + \gamma'(y - y_1) + \gamma''(z - z_1).$$

Hiermede, voor het product $x' z' \partial m$,

$$\begin{aligned} x' z' \partial m = {} & \alpha\gamma x^2 \partial m + \alpha'\gamma' y^2 \partial m + \alpha''\gamma'' z^2 \partial m \\ & - 2\alpha\gamma x_1 x \partial m - 2\alpha'\gamma' y_1 y \partial m - 2\alpha''\gamma'' z_1 z \partial m \\ & + (\alpha\gamma x_1^2 + \alpha'\gamma' y_1^2 + \alpha''\gamma'' z_1^2)\partial m \\ & + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) x y \partial m + (\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma) x z \partial m + (\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') y z \partial m \\ & - (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\{y_1 x \partial m + x_1 y \partial m\} + (\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) x_1 y_1 \partial m \\ & - (\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\{z_1 x \partial m + x_1 z \partial m\} + (\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma) x_1 z_1 \partial m \\ & - (\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\{z_1 y \partial m + y_1 z \partial m\} + (\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') y_1 z_1 \partial m \quad \ldots \quad (d) \end{aligned}$$

Van de termen des tweeden lids moeten nu de integralen, uitgestrekt over de geheele massa, genomen worden, ten einde de juiste uitdrukking der waarde van de integraal des eersten lids, dat is van $\int x' z' \partial m$, te verkrijgen. Daarbij worde gelet op het navolgende:

1°. x_1, y_1, z_1 zijn, even zoo als $\alpha, \alpha' \ldots\ldots \gamma', \gamma''$, standvastig.

2°. $\int x \partial m = x_1 m$, $\int y \partial m = y_1 m$, $\int z \partial m = z_1 m$ en $\int \partial m = m$.

3°. $\int x y \partial m = 0$, $\int x z \partial m = 0$, $\int y z \partial m = 0$, vermits de coördinaten-assen der massa zijn hoofdassen.

4°. Als A, B, C aanduiden de grootten der momenten van traagheid met betrekking tot de oorspronkelijke coördinaten-assen of hoofdassen voor het vaste punt, kan de som der integralen van de drie eerste termen uitgedrukt worden door $-\mathrm{A}\alpha\gamma - \mathrm{B}\alpha'\gamma' - \mathrm{C}\alpha''\gamma''$. Want

$$\alpha\gamma \int x^2 \partial m = \alpha\gamma \int (x^2 + y^2 + z^2)\partial m - \alpha\gamma \int (y^2 + z^2)\partial m$$
$$= \alpha\gamma \int (x^2 + y^2 + z^2)\partial m - \alpha\gamma \mathrm{A};$$

eveneens

$$\alpha'\gamma'\int y^2\partial m = \alpha'\gamma'\int(x^2+y^2+z^2)\partial m - \alpha'\gamma' B,$$

en

$$\alpha''\gamma''\int z^2\partial m = \alpha''\gamma''\int(x^2+y^2+z^2)\partial m - \alpha''\gamma'' C,$$

waardoor dan, ingevolge de eerste der betrekkingen (c), de gestelde uitdrukking voor de som der integralen van de genoemde drie eerste termen der vergelijking (d) zal komen.

De vergelijking (d) dan geïntegreerd wordende zal geven:

$$\int x'z'\partial m = -A\alpha\gamma - B\alpha'\gamma' - C\alpha''\gamma'' - \alpha\gamma x_1{}^2 m - \alpha'\gamma' y_1{}^2 m - \alpha''\gamma'' z_1{}^2 m$$
$$-(\alpha\gamma'+\alpha'\gamma)x_1 y_1 m - (\alpha\gamma''+\alpha''\gamma)x_1 z_1 m - (\alpha'\gamma''+\alpha''\gamma')y_1 z_1 m$$
$$= -(A\alpha\gamma + B\alpha'\gamma' + C\alpha''\gamma'') - m(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1)(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1).$$

Maar (zie (a)) $\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1 = \frac{p'}{\omega'} x_1 + \frac{q'}{\omega'} y_1 + \frac{r'}{\omega'} z_1 = \delta$; weshalve

$$-\int x'z'\partial m = A\alpha\gamma + B\alpha'\gamma' + C\alpha''\gamma'' + m(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1)\delta$$
$$= \left(A\frac{p'}{\omega'} + m x_1 \delta\right)\alpha + \left(B\frac{q'}{\omega'} + m y_1 \delta\right)\alpha' + \left(C\frac{r'}{\omega'} + m z_1 \delta\right)\alpha''.$$

Op dezelfde wijze zal gevonden worden

$$-\int y'z'\partial m = \left(A\frac{p'}{\omega'} + m x_1 \delta\right)\beta + \left(B\frac{q'}{\omega'} + m y_1 \delta\right)\beta' + \left(C\frac{r'}{\omega'} + m z_1 \delta\right)\beta''.$$

Zullen nu deze integralen ***nul*** zijn, dan moet, op grond der gevondene uitkomsten of betrekkingen, die bestaan als de aanvankelijke as van beweging geen drukking of botsing lijdt, de waarheid blijken van deze vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l}(Ap' + \omega' m x_1 \delta)\alpha + (Bq' + \omega' m y_1 \delta)\alpha' + (Cr' + \omega' m z_1 \delta)\alpha'' = 0, \\ (Ap' + \omega' m x_1 \delta)\beta + (Bq' + \omega' m y_1 \delta)\beta' + (Cr' + \omega' m z_1 \delta)\beta'' = 0.\end{array}\right\} \ldots (e)$$

Zijn a, b, c de coördinaten (met betrekking tot de coördinaten-assen der massa) van het punt in het vlak (V), dat gedacht kan worden den indruk der kracht P', gerigt in het vlak (V), onmiddellijk te ontvangen, dan volgt uit het behandelde en verkregene in art. 8 en 9,

$$p' = \frac{L'}{A} = \frac{Z'b - Y'c}{A} = \frac{m}{A}(bp'y_1 - bq'x_1 - cr'x_1 + cp'z_1),$$

$$q' = \frac{M'}{B} = \frac{X'c - Z'a}{B} = \frac{m}{B}(cq'z_1 - cr'y_1 - ap'y_1 + aq'x_1),$$

$$r' = \frac{N'}{C} = \frac{Y'a - X'b}{C} = \frac{m}{C}(ar'x_1 - ap'z_1 - bq'z_1 + br'y_1).$$

Maar a, b, c zijn coördinaten van een punt in het vlak (V); daarom moeten $x = a$, $y = b$, $z = c$ voldoen aan de vergelijking (b), dat is men moet hebben

$$p'a + q'b + r'c = \omega'\delta,$$

waaruit volgt

$$bq' + cr' = \omega'\delta - ap',$$

en hiermede wordt de vorenstaande uitdrukking voor p',

$$p' = \frac{m}{A}\{(by_1 + cz_1)p' - (\omega'\delta - ap')x_1\} = \frac{m}{A}\{(ax_1 + by_1 + cz_1)p' - \omega'\delta x_1\}.$$

Eveneens komt

$$q' = \frac{m}{B}\{(ax_1 + by_1 + cz_1)q' - \omega'\delta y_1\},$$

$$r' = \frac{m}{C}\{(ax_1 + by_1 + cz_1)r' - \omega'\delta z_1\}.$$

Uit elke dezer uitdrukkingen kunnen wel waarden voor p', q', r', door oplossing worden verkregen, maar het doel is hier eeniglijk eene voegzame vervorming der vergelijkingen (e), en deze heeft men door de verkregene uitdrukkingen terstond. Want zij geven

$$\begin{aligned} Ap' + \omega' m\delta x_1 &= m.\ (ax_1 + by_1 + cz_1)p', \\ &= m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)\gamma, \\ Bq' + \omega' m\delta y_1 &= m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)\gamma', \\ Cr' + \omega' m\delta z_1 &= m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)\gamma''; \end{aligned}$$

zoodat hiermede de vergelijkingen (e) overgaan in deze:

$$m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'') = 0,$$

$$m\omega'(ax_1 + by_1 + cz_1)(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'') = 0,$$

en op grond van de betrekkingen (c) zijn zij identisch $0 = 0$, dat is zij zijn *waar*. Dit alleen moest bewezen worden.

15. Men zou ook, *in de tweede plaats*, den weg kunnen volgen, welke eerstelijk in art. 14 werd aangewezen. Hij schijnt meer regtstreeks tot het doel te voeren, maar is, alles wel overwogen en te zamen genomen, minder kort.

De rigting der aanvankelijke as make, als boven, hoeken met de coördinaten-assen der massa, welker *cosinussen* zijn γ, γ', γ''. Zal zij ongedrukte as wezen, dan moet zij hoofdas zijn voor één van hare punten, maar dan moet ook de kracht gewerkt hebben of werken in een vlak, loodregt op de as en gaande door dit punt, of ook de kracht moet daartoe hare rigting hebben in het vlak der beide andere hoofdassen. Alles zal derhalve bepaald zijn of gemakkelijk bepaald kunnen worden, zoodra de plaats van het bedoelde punt der aanvankelijke as zal gevonden zijn.

Zij Δ de afstand van het vaste punt tot het begeerde punt — derhalve een afstand, gerekend langs de aanvankelijke as — en laat dit begeerde punt worden aangeduid door O. Het vlak, gaande door O en loodregt zijnde op de aanvankelijke as, heeft tot vergelijking

$$p'x + q'y + r'z = \omega'\Delta, \quad \text{of} \quad \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = \Delta \; , \dots\dots\dots \text{(W)}$$

en de coördinaten van O zullen zijn

$$\xi = \gamma\Delta, \quad \eta = \gamma'\Delta, \quad \zeta = \gamma''\Delta.$$

Wordt de oorsprong der coördinaten verplaatst in O — wordt de rigting der aanvankelijke as van omwenteling aangenomen als die van de as der ordinaten z'' — worden de assen der coördinaten x'' en y'' gedacht in het vlak (W), en maken zij met de coördinaten-assen der massa hoeken, welker *cosinussen* zijn α, α', α'', β, β', β'' (waarbij nogtans niet gedacht worde aan de hoeken, welker *cosinussen* in art. 14 mede door $\alpha, \dots \beta''$ zijn aangeduid), dan zijn de functiën voor de nieuwe coördinaten:

$$x'' = \alpha(x-\xi) + \alpha'(y-\eta) + \alpha''(z-\zeta),$$
$$y'' = \beta(x-\xi) + \beta'(y-\eta) + \beta''(z-\zeta),$$
$$z'' = \gamma(x-\xi) + \gamma'(y-\eta) + \gamma''(z-\zeta).$$

Zal de aanvankelijke as eene hoofdas voor het punt ξ, η, ζ, kunnen wezen, dan zal voldaan moeten worden aan de vergelijkingen

$$\int x''z''\partial m = 0, \quad \int y''z''\partial m = 0.$$

Volgende nu hier denzelfden gang van rekenen als in art. 14, dan zal gevonden worden:

$$
\begin{aligned}
-\int x''z''\partial m = &+ A\alpha\gamma + B\alpha'\gamma' + C\alpha''\gamma'' \\
&+ 2m(\alpha\gamma\xi x_1 + \alpha'\gamma'\eta y_1 + \alpha''\gamma''\zeta z_1) - m(\alpha\gamma\xi^2 + \alpha'\gamma'\eta^2 + \alpha''\gamma''\zeta^2) \\
&+ m(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\eta x_1 + m(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\xi y_1 \\
&+ m(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\zeta x_1 + m(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\xi z_1 \\
&+ m(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\zeta y_1 + m(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\eta z_1 \\
&- m(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)\xi\eta - m(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)\xi\zeta - m(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')\eta\zeta \\
= &+ A\alpha\gamma + B\alpha'\gamma' + C\alpha''\gamma'' \\
&+ (\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta)(\alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1)m \\
&+ (\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1)m \\
&- (\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta)m.
\end{aligned}
$$

Maar $(\gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1)$ is de uitdrukking der grootte δ van de projectie des voerstraals ϱ_1 van het zwaartepunt des ligchaams op de rigting der aanvankelijke as, en $(\gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta) = \Delta$; derhalve

$$
\begin{aligned}
-\int x''z''\partial m = &+ A\alpha\gamma + B\alpha'\gamma' + C\alpha''\gamma'' \\
&+ m\Delta x_1\alpha + m\Delta y_1\alpha' + m\Delta z_1\alpha'' \\
&+ m(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta) \\
= &(A\gamma + m\Delta x_1)\alpha + (B\gamma' + m\Delta y_1)\alpha' + (C\gamma'' + m\Delta z_1)\alpha'' \\
&+ m(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta).
\end{aligned}
$$

Eveneens

$$
\begin{aligned}
-\int y''z''\partial m = &(A\gamma + m\Delta x_1)\beta + (B\gamma' + m\Delta y_1)\beta' + (C\gamma'' + m\Delta z_1)\beta'' \\
&+ m(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)(\delta - \Delta).
\end{aligned}
$$

Dienvolgens zal, $\frac{p'}{\omega'}, \frac{q'}{\omega'}, \frac{r'}{\omega'}$ in plaats van $\gamma, \gamma', \gamma''$ stellende, voldaan moeten worden aan de vergelijkingen

$$
\left.
\begin{aligned}
(Ap' + \omega' m\Delta x_1)\alpha + (Bq' + \omega' m\Delta y_1)\alpha' + (Cr' + \omega' m\Delta z_1)\alpha'' & \\
+ \omega' m(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta) &= 0, \\
(Ap' + \omega' m\Delta x_1)\beta + (Bq' + \omega' m\Delta y_1)\beta' + (Cr' + \omega' m\Delta z_1)\beta'' & \\
+ \omega' m(\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)(\delta - \Delta) &= 0.
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots (f)
$$

Wederom te werk gaande als in art. 14, mits hier a, b, c beteekenen de coördinaten van een punt in het vlak (W), en wel van eenig punt der rigting van de kracht P′, zal gevonden worden

$$\left.\begin{aligned} Ap' + \omega' m \Delta x_1 &= m(ax_1 + by_1 + cz_1)\omega'\gamma; \\ Bq' + \omega' m \Delta y_1 &= m(ax_1 + by_1 + cz_1)\omega'\gamma'; \\ Cr' + \omega' m \Delta z_1 &= m(ax_1 + by_1 + cz_1)\omega'\gamma''. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (g)$$

De twee voorgaande vergelijkingen zullen dan, na door $\omega' m$ te zijn gedeeld, worden:

$$(ax_1 + by_1 + cz_1)(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'') + (\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta) = 0,$$
$$(ax_1 + by_1 + cz_1)(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'') + (\beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta)(\delta - \Delta) = 0.$$

Van deze vergelijkingen zijn de eerste termen *nul*, dewijl $(\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'')$ en $(\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')$ *nul* zijn. Derhalve moeten ook de tweede termen *nul* zijn, waaraan voldaan wordt met $\Delta = \delta$, zoodat de plaats van het begeerde punt O zal zijn het voetpunt der normaal, uit het zwaartepunt op de rigting der aanvankelijke as van omwenteling getrokken, en het vlak (W) zal door het zwaartepunt gaan.

Men kan echter tegenwerpen, dat ook de genoemde tweede termen, onafhankelijk van $\Delta = \delta$, *nul* zijn, omdat, b.v. alleenlijk op eene der vergelijkingen lettende,

$$\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta = (\alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'')\Delta$$

is. Deze moeijelijkheid, dit onbeslist blijven, schijnt alleenlijk op deze wijze opgeheven te kunnen worden.

Omdat, in elk geval, $(\alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta)(\delta - \Delta)$ *nul* is, zal het eerste lid der vergelijking (f) n° 1 worden

$$(Ap' + \omega' m \Delta x_1)\alpha + (Bq' + \omega' m \Delta y_1)\alpha' + (Cr' + \omega' m \Delta z_1)\alpha''.$$

Is nu werkelijk $\Delta = \delta$, dan zal deze uitdrukking bevonden moeten worden *nul* te zijn, indien δ in plaats van Δ wordt gesteld. Dit is wel waar, naar aanleiding van hetgeen in art. 14 met betrekking tot de vergelijkingen (e) is aangetoond, maar in plaats van naar eene ontwikkeling, in het eerst gegeven bewijs voorkomende, te verwijzen, zou het dan korter zijn op de vergelijkingen (g) terug te komen, welker tweede leden niet regtstreeks van Δ afhangen, en derhalve ook gelden als δ komt in plaats van Δ, mits dan ook de a, b, c in deze tweede leden gedacht worden te zijn coördinaten van

een punt in het vlak (W), gaande nu, overeenkomstig het stellen van Δ gelijk aan δ, door het zwaartepunt. Heeft men op deze wijze aangetoond dat $\Delta = \delta$ aan den eisch voldoet, dan blijft nog overig te bewijzen dat het vlak (W), het vlak van twee der hoofdassen voor het punt O, tevens is een vlak van twee voorname hoofdassen. Hierin is wel geen bezwaar, door eenvoudige verplaatsing van den oorsprong der coördinaten, in het vlak (W), van het punt O in het zwaartepunt, doch het een en het ander maakt dit meer regtstreeks zoeken en bepalen van het begeerde omslagtiger dan het volgen van den weg, die in art. 14, naar eene vooraf gemaakte vooronderstelling, eerst gekozen werd.

AANTEEKENING.

De vergelijkingen (7), (42) en (43), verkregen in § I, art. 5, en in § II, art. 2, — en die de uitdrukkingen zijn der voorwaarde van het onveranderlijk zamenhangen der stofdeelen van de massa, dat is van het onveranderlijk zijn der onmiddellijke aansluiting en onderlinge betrekkelijke plaatsing der elementen van de massa, — kunnen langs korter weg worden gevonden.

Omdat de afstand ∂s van een punt (der massa), welks coördinaten zijn x, y, z, tot eenig ander der onmiddellijk rondom gelegene punten, hebbende $x + \partial x$, $y + \partial y$, $z + \partial z$ tot coördinaten, onveranderlijk is bij eenige oneindig kleine variatie der coördinaten, zal uit

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial s^2$$

terstond volgen

$$2\,\partial x\,\delta\,\partial x + 2\,\partial y\,\delta\,\partial y + 2\,\partial z\,\delta\,\partial z = 0,$$

of

$$2\,\partial x\,\partial\,\delta x + 2\,\partial y\,\partial\,\delta y + 2\,\partial z\,\partial\,\delta z = 0,$$

zijnde de vergelijking (42), welke tevens de vergelijking (7) insluit.

Voor den afstand $\partial s'$ van laatstgenoemd punt tot een ander, dat wederom volgt of onmiddellijk aansluit, en van hetwelk de coördinaten zijn, $x + 2\,\partial x + \partial^2 x$, $y + 2\,\partial y + \partial^2 y$, $z + 2\,\partial z + \partial^2 z$, heeft men de vergelijking

$$(\partial x + \partial^2 x)^2 + (\partial y + \partial^2 y)^2 + (\partial z + \partial^2 z)^2 = \partial s'^2.$$

Uit deze en uit de eerste der voorgaande vergelijkingen volgt

$$2\,\partial x\,\partial^2 x + (\partial^2 x)^2 + 2\,\partial y\,\partial^2 y + (\partial^2 y)^2 + 2\,\partial z\,\partial^2 z + (\partial^2 z)^2 = \partial s'^2 - \partial s^2,$$

of

$$(\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2 + (\partial^2 z)^2 + 2\,\partial s\,\partial^2 s = \partial s'^2 - \partial s^2.$$

Omdat nu noch $\partial s'$ noch ∂s veranderen bij oneindig kleine variatie der coördinaten, zal men ook hebben

$$2\,\partial^2 x\,\delta\,\partial^2 x + 2\,\partial^2 y\,\delta\,\partial^2 y + 2\,\partial^2 z\,\delta\,\partial^2 z = 0,$$

dat is

$$2\,\partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + 2\,\partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + 2\,\partial^2 z\,\partial^2\,\delta z = 0,$$

en deze is de vergelijking (43).

Gaat men zoo voort, dan blijkt ligtelijk dat, voor zoo vele opvolgende punten men zou willen, ook in het algemeen

$$(\partial^n x)^2 + (\partial^n y)^2 + (\partial^n z)^2$$

geen variatie ondergaat bij het oneindig weinig variëren der coördinaten, en dat daaruit zal voortvloeijen de algemeene voorwaardes-vergelijking der variatie van de coördinaten

$$2\,\partial^n x\,\partial^n\,\delta x + 2\,\partial^n y\,\partial^n\,\delta y + 2\,\partial^n z\,\partial^n\,\delta z = 0 \;*.$$

---

* De hier voorgedragene kortere manier, om de voorwaardes-vergelijkingen voor den onveranderlijken zamenhang der elementen van eene vaste massa te verkrijgen, is gevolgd naar eene opmerking van den Heer LOBATTO. De Heer STAMKART evenwel kon zich noch met deze wijze van afleiden, noch met die, welke in § I, art. 5, en in § II, art. 2, de noodige vergelijkingen heeft opgeleverd, noch ook in elk opzigt met de wijze van beschouwen en rekenen van LAGRANGE vereenigen. Hetgeen ZEd. over een en ander heeft aangemerkt, is genoegzaam woordelijk het navolgende met „ aangehaalde.

„De vergelijkingen (42) en (43), in welke ook (7) begrepen is, zijn gevonden door aan te nemen, dat „de variatiën van de uitdrukkingen

$$x^2 + y^2 + z^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)},$$

$$(x + \partial x)^2 + (y + \partial y)^2 + (z + \partial z)^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)},$$

$$(x + 2\,\partial x + \partial^2 x)^2 + (y + 2\,\partial y + \partial^2 y)^2 + (z + 2\,\partial z + \partial^2 z)^2 \ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

„gelijk *nul* moeten zijn. Naar het mij voorkomt kunnen de vergelijkingen (42) en (43) hieruit *niet* „worden afgeleid. Wanneer toch de uitdrukkingen (II) en (III) iets anders zullen beteekenen dan (I), moeten „∂x, ∂y, ∂z, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, $\partial^2 z$ als eindige grootheden beschouwd worden, zoo klein men wil, maar „toch als *grootheden*, en niet als *oneindig kleinen*. Want zou hier b. v. ∂x oneindig klein zijn, dan is „$(x + \partial x)$ *niets meer of minder* dan x. ∂x heeft geen beteekenis dan alleenlijk met betrekking tot eene „andere differentiaal."

De aanmerking is op zich zelve juist, maar de wijze waarop in den tekst is te werk gegaan, is geen afwijking van hetgeen in de toepassingen der differentiaal-rekening meermalen geschiedt en als geoorloofd is aangenomen, te weten dat men, in plaats van eerst op eindige veranderingen opzettelijk te letten, deze als *differentiën* uit te drukken, en daarna, bij overgang tot de limieten, daarvoor in de plaats te stellen hetgeen behoort, onmiddellijk besluite tot dit laatste, en derhalve het eerste (het gebruik van eindige differentiën) nalate, daarbij slechts denkende hetgeen er bij gedacht moet worden. Wil men verder differentialen eeniglijk met betrekking tot andere beschouwen, dan kan men de differentiaal van eenige andere onafhankelijk veran-

Bij de oplossing der voorstellen over de beweging van een vast ligchaam om eene vaste as en om een vast punt, heeft men slechts te letten op *drie* onbepaalde variatiën δx, δy, δz. Daarom zijn er ook niet meer dan drie voorwaardes-vergelijkingen van de variatiën der

---

derlijke grootheid denken; zij behoeft niet genoemd of uitgedrukt te worden, gelijk dit b. v. somtijds wordt nagelaten in de variatie-rekening bij het variëren van eene integraal.

„In de plaats van ∂x komt dan Δx, voor $\partial^2 x$ komt $\Delta^2 x$, enz., zoodat men zal hebben:

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)},$$

$$(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2 + (z + \Delta z)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)},$$

$$(x + 2\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (y + 2\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (z + 2\Delta z + \Delta^2 z)^2 \ldots\ldots \text{(III)}.$$

„Van deze uitdrukkingen moeten de variatiën *nul* zijn. De eerste geeft

$$2x\,\partial x + 2y\,\partial y + 2z\,\partial z = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

„De tweede heeft tot variatie

$$2(x + \Delta x)(\partial x + \partial\Delta x) + 2(y + \Delta y)(\partial y + \partial\Delta y) + 2(z + \Delta z)(\partial z + \partial\Delta z) = 0,$$

„dat is, op (41) lettende,

$$2\{\Delta x\,\partial x + x\,\partial\Delta x + \Delta y\,\partial y + y\,\partial\Delta y + \Delta z\,\partial z + z\,\partial\Delta z\} +$$
$$2\{\Delta x\,\partial\Delta x + \Delta y\,\partial\Delta y + \Delta z\,\partial\Delta z\} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

„Worden nu Δx, Δy, Δz steeds kleiner en kleiner, dan worden de termen, die in deze vergelijking „als een tweede gedeelte van het eerste lid zijn genomen, en die van de derde orde zijn, steeds kleiner „met betrekking tot de termen van de eerste groep, en die van de tweede orde zijn, zoodat, tot de „limieten overgaande, alleenlijk blijft

$$2\{\partial x\,\partial x + x\partial\,\partial x + \partial y\,\partial y + y\partial\,\partial x + \partial z\,\partial z + z\partial\,\partial z\} = 0,$$

„maar er volgt *niet* dat $2\{\partial x\,\partial\,\partial x + \partial y\,\partial\,\partial y + \partial z\,\partial\,\partial z\} = 0$ zou zijn met betrekking tot de grens- „waarde eener grootheid van de derde orde."

Maar $(\partial x\,\partial x + x\partial\,\partial x + \partial y\,\partial y + y\partial\,\partial y + \partial z\,\partial z + z\partial\,\partial z)$ is niet onderscheiden van $\partial(x\,\partial x + y\,\partial y + z\,\partial z)$. Derhalve zou de uitkomst alleenlijk leeren, dat

$$\partial(x\,\partial x + y\,\partial y + z\,\partial z) = 0$$

ware. Dit *nul* zijn echter behoeft niet bewezen te worden, daar het een gevolg is van hetgeen de vergelijking (41) uitdrukt. Bovendien zou dan door de ontwikkeling van (II) niet meer of niets anders geleerd worden dan reeds door (I) bekend werd, terwijl er meer uit afgeleid moet kunnen worden. Zou niet het begeerde verkregen worden als men vooraf opmerkte, dat

$$\Delta x\,\partial x + x\,\partial\Delta x + \Delta y\,\partial y + y\,\partial\Delta y + \Delta z\,\partial z + z\,\partial\Delta z$$

aan de limiet zal worden $= \partial(x\,\partial x + y\,\partial y + z\,\partial z)$, en daarom, op grond van (41), gelijk *nul*, zoodat dan, aan de limiet, de vergelijking (A) zal overgaan in

$$2\{\partial x\,\partial\,\partial x + \partial y\,\partial\,\partial y + \partial z\,\partial\,\partial z\} = 0?$$

„Meetkundig beschouwd geeft het standvastig zijn van de uitdrukkingen (I), (II), (III) slechts te „kennen, dat drie punten op de oppervlakken van drie verschillende bollen moeten zijn. Het al of niet

coördinaten noodig, en van deze hebben òf slechts *één* òf *twee* betrekking tot de vooronderstelling van het vast zijn der bewogen wordende massa. Beschouwt of neemt men de voorwaarde van dit *vast* zijn afgescheiden van andere voorwaarden, tot wijze van beweging

---

„bij elkander geplaatst zijn dier punten wordt er niet door aangewezen. Twee dier punten kunnen „b. v. een afstand hebben $= r + r'$, r en r' de stralen van twee dier bollen zijn."

Maar bestaan de uitdrukkingen (I), (II), (III) dan niet uitsluitend onder de duidelijk genoemde en herhaaldelijk genoemde voorwaarde, dat zij alleenlijk betrekking hebben tot *aan elkander grenzende* of tot *onmiddellijk op elkander volgende* elementen der massa? De coördinaten der punten duiden dit reeds aan. De onderlinge plaatsing en verwijdering der punten op de drie spherische vlakken zijn derhalve geenszins willekeurig, vooral niet als men in aanmerking neemt, dat aan bepaalde teekens, hetzij dan + hetzij —, vóór de differentialen van x, y, z, moet gedacht worden.

„De vergelijkingen (42) en (43) kunnen slechts afgeleid worden uit de overweging, dat de onderlinge „afstanden van eenig punt tot een tweede, van het eerste punt tot een derde, en van het tweede punt „tot het derde standvastig moeten zijn, dat is

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \textit{standvastig},$$

$$(2\,\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (2\,\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (2\,\Delta z + \Delta^2 z)^2 = \textit{standv.},$$

$$(\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (\Delta z + \Delta^2 z)^2 = \textit{standv.},$$

„waaruit dan

$$(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 = \textit{standv.},$$

„en uit deze en de eerste der drie voorgaande vergelijkingen zal dan volgen

$$2\left\{\Delta x\,\partial\Delta x + \Delta y\,\partial\Delta y + \Delta z\,\partial\Delta z\right\} = 0,$$

$$2\left\{\Delta^2 x\,\partial\Delta^2 x + \Delta^2 y\,\partial\Delta^2 y + \Delta^2 z\,\partial\Delta^2 z\right\} = 0,$$

„gevende, bij overgang tot de limieten, de vergelijkingen (42) en (43)."

Men wil de juistheid dezer wijze van beschouwen, om de voorwaarde van het onveranderlijk geplaatst zijn der elementen ontwijfelbaar uit te drukken, gaarne toegeven. Is zij echter niet in die van LAGRANGE begrepen? Er wordt hier bepaaldelijk gesteld of voorgeschreven, *den afstand van het tweede tot het derde punt mede in rekening te brengen*. LAGRANGE deed dit niet, of vond geene reden om het te noemen. Hij had geene drie voorwaardes-vergelijkingen noodig. Hij wilde er vele geven. Hij wilde ze alle geven voor alle mogelijke afstanden tusschen paren van elementen, niet alleenlijk de afstanden van 1 tot 2, tot 3, tot 4, enz., maar, elk punt een eerste punt kunnende zijn, dan ook de afstanden van 2 tot 3, van 2 tot 4, enz. van 3 tot 4, enz. enz.

„Zelfs heb ik bedenking tegen de wijze, waarop deze vergelijkingen door LAGRANGE verkregen zijn. „Hij stelt (zie de vergelijkingen, in de Aanteekening der Bijdrage gemerkt (aa))

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \alpha,$$

enz. . . enz.

„Volgens mijne wijze van zien kunnen deze differentialen, zoo lang zij met x, y, z, door optelling, „of aftrekking verbonden zijn, slechts als eindige differentiën beschouwd worden. Men moet derhalve, „LAGRANGE volgende, stellen:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \alpha,$$

$$(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 = \beta.$$

als anderzins betrekking hebbende, — vraagt men derhalve alleenlijk voorwaardes-vergelijkingen, die den onveranderlijken zamenhang der deelen van de massa zullen uitdrukken, dan moet het aantal dezer vergelijkingen *drie* zijn, wel te verstaan met opzigt tot de elementen der massa in het algemeen, dat is bij het onbepaald blijven der plaats van de elementen in de uitgebreidheid der massa. Behalve de vergelijkingen

$$2\,\partial x\,\partial\,\delta x + 2\,\partial y\,\partial\,\delta y + 2\,\partial z\,\partial\,\delta z = 0,$$

$$2\,\partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + 2\,\partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + 2\,\partial^2 z\,\partial^2\,\delta z = 0,$$

behoeft men alsdan nog één vergelijking, welke, zoo als de tweede is gevonden door middel van de eerste, verkregen kan worden met de tweede en eerste vergelijkingen, en welke is

$$2\,\partial^3 x\,\partial^3\,\delta x + 2\,\partial^3 y\,\partial^3\,\delta y + 2\,\partial^3 z\,\partial^3\,\delta z = 0.$$

Men kan eene vierde, eene vijfde dergelijke vergelijking vormen, enz. Alle zullen begrepen zijn in de hiervoren gestelde algemeene, namelijk

$$2\,\partial^n x\,\partial^n\,\delta x + 2\,\partial^n y\,\partial^n\,\delta y + 2\,\partial^n z\,\partial^n\,\delta z = 0.$$

In het algemeen geval zijn er echter slechts *drie* dezer vergelijkingen noodig, voor zoo verre zij zijn onderling onafhankelijk. Want er zijn niet meer dan drie onbepaalde variatiën, en zoo men deze zou willen bepalen, dat is vinden hoe, bij het onbepaald blijven der coördinaten, de variatiën der coördinaten van de punten eener vaste massa zamenhangen met die coördinaten zelve, dan zouden daartoe drie zoodanige vergelijkingen toereiken. Al de overige gelijkvormige vergelijkingen zullen door dezelfde waarden der variatiën δx, δy, δz

---

„Om nu te bewijzen dat *de variatie van β nul* is, moet men hebben:

$$(2\,\Delta x + \Delta^2 x)^2 + (2\,\Delta y + \Delta^2 y)^2 + (2\,\Delta z + \Delta^2 z)^2 = \textit{standvastig},$$

„dat is

$$4\{(\Delta x^2) + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\} + 4\{\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z\} + \{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2\} = \textit{standv.}\,.(\mathrm{B})$$

„Maar nemende, volgens den regel, de differentie van α, dan komt, na met 2 vermenigvuldigd en met „4α vermeerderd te hebben,

$$4\alpha + 2\,\Delta\alpha = 4\{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\} + 4\{\Delta x\,\Delta^2 x + \Delta y\,\Delta^2 y + \Delta z\,\Delta^2 z\} +$$
$$+ 2\{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2\},$$

„of

$$4\alpha + 2\,\Delta\alpha - \{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2\} = (\mathrm{B}) = \textit{standv.},$$

„dat is

$$4\alpha + 2\,\Delta\alpha - \beta = \textit{standv.},$$

„waarvoor bij LAGRANGE komt

$$4\alpha + 2\,\partial\alpha + \beta.$$

„De uitkomst blijft nogtans dezelfde, namelijk deze: daar α standvastig is met betrekking tot de variatie „δ, is ook $\Delta\alpha$ in denzelfden zin standvastig; bij gevolg ook β, en daarom de variatie van β gelijk *nul.*

„Eene gelijksoortige opmerking geldt, naar het mij voorkomt, ook omtrent het bewijs, in de Aanteekening gegeven, en naar eene mededeeling van den Heer LOBATTO gevolgd."

voldaan of identisch $0 = 0$ worden, door welke eenig drietal wordt voldaan, of die uit eenig drietal mogten zijn afgeleid, en waartoe dan klaarblijkelijk voorkeur wordt gegeven aan de drie eerste vergelijkingen, als, door lagere orde, de eenvoudigste.

Men is deze algemeene voorwaardes-vergelijkingen van het onveranderlijk verband der elementen van een vast ligchaam verschuldigd aan Lagrange, die er gebruik van gemaakt heeft om, naar zijne methode, de vergelijkingen te vinden voor het evenwigt van krachten, werkende op de elementen zoo van een onrekbaren en onbuigbaren draad, of eener massieve roede, als op die van een vast ligchaam (zie zijne *Mécanique Analytique, Première Partie. Sect.* V, *Chap.* III, § IV, *et Chap.* IV, *page* 159—173, *Edit.* 1811).

Lagrange denkt eene menigte op elkander volgende punten, bepaald door de opvolgende coördinaten x, y, z, $x+\partial x$, $y+\partial y$, $z+\partial z$, $x+2\partial x+\partial^2 x$, $y+2\partial y+\partial^2 y$, $z+2\partial z+\partial^2 z$, enz. De uitdrukkingen voor de quadraten der afstanden van het eerste punt tot elk der volgende worden ligtelijk gevonden. Zij zullen zijn

$$\alpha,$$
$$4\alpha + 2\partial\alpha + \beta,$$
$$9\alpha + 9\partial\alpha + 9\beta + 3(\partial^2\alpha - 2\beta) + 3\partial\beta + \gamma,$$
$$\text{enz.} \qquad \text{enz.},$$

indien namelijk gesteld wordt

$$\left.\begin{aligned} \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 &= \alpha, \\ (\partial^2 x)^2 + (\partial^2 y)^2 + (\partial^2 z)^2 &= \beta, \\ (\partial^2 x)^2 + (\partial^3 y)^2 + (\partial^2 z)^2 &= \gamma, \\ \text{enz.} \ldots\ldots & \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (aa)$$

De genoemde afstanden onveranderlijk moetende zijn, zullen de variatiën der tweede magten van de uitdrukkingen, door welke zij zijn bepaald, *nul* wezen, en daarom

$$\delta\alpha = 0;\ 4\delta\alpha + 2\delta\partial\alpha + \delta\beta = 0;\ 9\delta\alpha + 9\delta\partial\alpha + 3\delta\beta + 3\delta\partial^2\alpha + 3\delta\partial\beta + \delta\gamma = 0;\ \text{enz.}$$

En hieruit leidt men gemakkelijk af, dat aan de voorwaarde van het onveranderlijk aansluitend zamenhangen of volkomen vast zijn der deelen van het ligchaam voldaan zal worden door de vergelijkingen $\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, dat is door deze drie vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} \partial x\,\partial\,\delta x + \partial y\,\partial\,\delta y + \partial z\,\partial\,\delta z &= 0, \\ \partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + \partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + \partial^2 z\,\partial^2\delta z &= 0, \\ \partial^2 x\,\partial^2\,\delta x + \partial^2 y\,\partial^2\,\delta y + \partial^3 z\,\partial^3\delta z &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (bb)$$

Werken er derhalve op de elementen van een vast ligchaam krachten, die, ontbonden zijnde in rigtingen evenwijdig aan aangenomene coördinaten-assen, tot zamenstellende krachten hebben $X\,\partial m$, $Y\,\partial m$, $Z\,\partial m$, dan zal, bij de onbepaalde vergelijking der virtuele momenten

voor het evenwigt dezer krachten, gevoegd moeten worden de som der sommen (integralen over de geheele uitgebreidheid van het ligchaam) van de voorgaande vergelijkingen (die elke slechts tot een enkel element betrekking hebben), elke vooraf met een onbepaalden factor λ, μ, ν vermenigvuldigd zijnde. De voorwaarde van het vast zijn des ligchaams op deze wijze in rekening gebragt zijnde, heeft men de meer bepaalde vergelijking der virtuele momenten. Zij zal dienvolgens, onherleid, deze zijn:

$$0 = \int\Big\{(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,\partial m + \lambda(\partial x\,\partial\,\delta x + \partial y\,\partial\,\delta y + \partial z\,\partial\,\delta z)$$
$$+ \mu(\partial^2 x\,\partial^2\delta x + \partial^2 y\,\partial^2\delta y + \partial^2 z\,\partial^2\delta z) + \nu(\partial^3 x\,\partial^3\delta x + \partial^3 y\,\partial^3\delta y + \partial^3 z\,\partial^3\delta z)\Big\} \; * \; . \; (cc)$$

* De vergelijking (*cc*) zou kunnen vervangen worden door eene andere, geen onbepaalde factoren λ, μ, ν bevattende. Deze andere komt, door, uit de vergelijkingen (*bb*), de waarden der variatiën δx, δy, δz te bepalen (in functie van de onbepaalde coördinaten x, y, z en van willekeurige standvastige grootheden, die zelve als variatiën zijn aan te merken), en deze waarden alsdan in de onbepaalde algemeene vergelijking der virtuele momenten te substitueren. Dit is mede door LAGRANGE gedaan. Hij integreerde daartoe de vergelijkingen (*bb*), maar voor het meer eenvoudige der uitvoering nam hij aan dat ∂x standvastig zij, en daarom $\partial^2 x = 0$ en $\partial^3 x = 0$ (vergelijk, hiervoren, § II, art. 4). LAGRANGE vond (zie *Mécan. Anal.* p. 169 de la *Première Partie*)

$$\delta x = \delta l - y\,\delta N + z\,\delta M,$$
$$\delta y = \delta m + x\,\delta N - z\,\delta L,$$
$$\delta z = \delta n - x\,\delta M + y\,\delta L,$$

in welke δl, δm, δn, δL, δM, δN, *zes* willekeurige standvastige grootheden zijn, van dezelfde orde als δx, δy, δz. Deze eenvoudige formulen zijn de uitdrukkingen voor de variatiën der coördinaten van elk punt eener vaste massa, naar eenige voorwaarde bewogen of verplaatst kunnende worden.

LAGRANGE noemt EULER, als door wien deze formulen het eerst zouden gevonden zijn, ofschoon op andere en minder strikte wijze.

EULER gaf in het jaar 1750 (*Mémoires de l'Académie de Berlin*) zijne belangrijke verhandeling, getiteld „*Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*," ten doel hebbende om een nieuwen en beteren weg aan te wijzen, ter oplossing van het toen nog zoo moeijelijk en niet genoegzaam opgelost Problema der beweging van een vast ligchaam om een vast punt. En inderdaad heeft EULER in deze verhandeling ook op het oog gehad om de voorwaarde van het vast zijn des ligchaams op bijzondere wijze in rekening te brengen. Ofschoon zich noch van de bewoording *variatie* noch van het teeken δ, ter aanduiding van eenige variatie, bedienende, kwam hij toch, bijkans volgens hetzelfde daaraan te hechten begrip, tot de uitdrukkingen voor de veranderingen bij het verplaatst worden van eenig punt der massa, dat met een oneindig nabij gelegen punt op onveranderlijke wijze is verbonden. Hetgeen LAGRANGE kon noemen *variatie* werd door EULER genoemd *snelheid in den tijd* ∂t. Zijn P, Q, R zoodanige snelheden, in de rigtingen der coördinaten-assen, dan komt EULER tot deze betrekkingen

$$Px + Qy + Rz = 0,$$
$$\partial P\,\partial x + \partial Q\,\partial y + \partial R\,\partial z = 0,$$

welke, als voorwaardes-vergelijkingen, volstrekt dezelfde zijn als de in deze Bijdrage gevondene vergelijkingen (41) en (42), zoo slechts $2\,\delta x$, $2\,\delta y$, $2\,\delta z$ in plaats van P, Q, R worden gesteld. EULER vindt evenwel slechts deze twee vergelijkingen. Eene derde, hoedanige de vergelijking (43) is, geeft hij niet, en dit is minder streng of minder volledig. Nogtans vindt hij, ofschoon niet regtstreeks, maar door bijzondere vooronderstellingen aan te nemen,

Herleidt men deze vergelijking door integreren bij gedeelten, zoodat alle termen onder het integraalteeken van loutere variatiën (geen differentialen van variatiën) afhangen, — en onderscheidt men de bestanddeelen der termen, buiten het integraalteeken gekomen en alleenlijk tot de beide limieten der integraal betrekking hebbende, door accenten (b. v. λ'' en λ', μ'' en $\mu' \ldots . x''$ en x', enz., naar gelang zij gelden voor de tweede grens of voor de eerste, en bij welke eerste grens al de integralen, die in de beschouwing voorkomen, verdwijnen of *nul* zijn), — dan komt deze ontwikkelde en herleide vergelijking:

$$0 = \int \Big\{ \Big[X\,\partial m - \partial(\lambda\,\partial x) + \partial^2(\mu\,\partial^2 x) - \partial^3(\nu\,\partial^2 x) \Big] \delta x$$
$$+ \Big[Y\,\partial m - \partial(\lambda\,\partial y) + \partial^2(\mu\,\partial^2 y) - \partial^3(\nu\,\partial^2 y) \Big] \delta y$$
$$+ \Big[Z\,\partial m - \partial(\lambda\,\partial z) + \partial^2(\mu\,\partial^2 z) - \partial^3(\nu\,\partial^2 y) \Big] \delta z \Big\}$$
$$+ \{\lambda''\partial x'' - \partial(\mu''\partial^2 x'') + \partial^2(\nu''\partial^3 x'')\}\,\delta x'' - \{\lambda'\partial x' - \partial(\mu'\partial^2 x') + \partial^2(\nu'\partial^3 x')\}\,\delta x'$$
$$+ \{\lambda''\partial y'' - \partial(\mu''\partial^2 y'') + \partial^2(\nu''\partial^3 y'')\}\,\delta y'' - \{\lambda'\partial y' - \partial(\mu'\partial^2 y') + \partial^2(\nu'\partial^3 y')\}\,\delta y'$$
$$+ \{\lambda''\partial z'' - \partial(\mu''\partial^2 z'') + \partial^2(\nu''\partial^3 z'')\}\,\delta z'' - \{\lambda'\partial z' - \partial(\mu'\partial^2 z') + \partial^2(\nu'\partial^3 z')\}\,\delta z'$$
$$+ \{\mu''\partial^2 x'' - \partial(\nu''\partial^3 x'')\}\,\partial\delta x'' + (\nu''\partial^2 x'')\partial^2\delta x'' - \{\mu'\partial^2 x' - \partial(\nu'\partial^3 x')\}\,\partial\delta x' - (\nu'\partial^3 x')\partial^2\delta x'$$
$$+ \{\mu''\partial^3 y'' - \partial(\nu''\partial^3 y'')\}\,\partial\delta y'' + (\nu''\partial^3 y'')\partial^2\delta y'' - \{\mu'\partial^2 y' - \partial(\nu'\partial^3 y')\}\,\partial\delta y' - (\nu'\partial^3 y')\partial^2\delta y'$$
$$+ \{\mu''\partial^2 z'' - \partial(\nu''\partial^2 z'')\}\,\partial\delta z'' + (\nu''\partial^2 z'')\partial^2\delta z'' - \{\mu'\partial^2 z' - \partial(\nu'\partial^3 z')\}\,\partial\delta z' - (\nu'\partial^3 z')\partial^2\delta z' \;. \quad (dd)$$

Lagrange behandelt deze vergelijking verder, gelijk men, ter aangehaalde plaats, kan nagaan. Het is onnoodig daarvan hier meer te ontleenen of te geven voor hetgeen thans, tot besluit, nog zal worden bijgebragt als voorbeeld van toepassing dezer vergelijking, om het voorstel der beweging van een vast ligchaam om een vast punt op te lossen. Daartoe moeten vooreerst de onbepaaldelijk aangeduide krachten $X\,\partial m$, $Y\,\partial m$, $Z\,\partial m$, tusschen welke evenwigt zal bestaan, vervangen worden door die, welke, volgens het beginsel van d'Alem-

---

$$P(=\partial x) = +Ay + Bz; \quad Q(=\partial y) = +Cz - Ax; \quad R(=\partial z) = -Bx - Cy,$$

in welke A, B, C willekeurige standvastige grootheden zijn (vergelijk de uitkomsten, door integreren verkregen in § II (art. 4) dezer Bijdrage). Het zijn deze vergelijkingen, welke Lagrange heeft kunnen bedoelen als het eerst door Euler gevonden. In vorm zijn zij niet onderscheiden van de door Lagrange gegevene formulen. Deze zijn algemeen, als geen betrekking hebbende tot eenig bepaald geval van beweging eener vaste massa, terwijl Euler zich had ten doel gesteld vergelijkingen of formulen te vinden, toepasselijk op het bijzonder geval of bepaald problema der beweging van een vast ligchaam om een vast punt; alsdan toch vervallen, bij het niet vrij zijn der massa, *drie* van de *zes* willekeurige standvastige grootheden, die in de formulen van Lagrange aanwezig zijn en moesten zijn.

Euler gewaagt ook van de krachten, aan welke men, bij het in rekening brengen der voorwaarde van den onveranderlijken zamenhang der elementen van de massa, kan denken. Van een bepalen dezer krachten kon geen sprake zijn, gelijk ook, het voorschrift van Lagrange volgende, zoodanige bepaling, door het bepalen der waarden van de factoren μ en ν, uit den aard der zaak tot niets zou leiden. Euler merkt hieromtrent eenvoudiglijk op: „*or il est à remarquer que les forces internes se détruisent mutuellement.*"

BERT, evenwigt moeten maken door middel van de betrekkelijk gedwongene stelling van het te bewegen ligchaam, dat is, in de plaats van de termen $X\partial m$, $Y\partial m$, $Z\partial m$ komen deze andere

$$\left(X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right),\quad \left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right),\quad \left(Z\partial m-\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}\partial m\right).$$

Vermits nu in de vergelijking *(dd)* al de variatiën onder het integraalteeken, of in de integraal-uitdrukking, als onderling onafhankelijk kunnen worden voorondersteld, en de grootte van elke dezer variatiën, alhoewel ook oneindig klein, daardoor geheel onbepaald is en willekeurig, — daar verder aan de vergelijking, volgens den bekenden regel, voldaan wordt door én de integraal-uitdrukking, én de som der termen buiten de integraal, afzonderlijk *nul* te stellen, — zal ook elke der drie integralen, die δx, δy, δz tot factoren hebben, *nul* zijn. Hierdoor heeft men, daar ook de integraalteekens kunnen weggelaten worden, in de eerste plaats, deze drie vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right)-\partial(\lambda\partial x)+\partial^2(\mu\partial^2 x)-\partial^3(\nu\partial^3 x)=0,\\
&\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)-\partial(\lambda\partial y)+\partial^2(\mu\partial^2 y)-\partial^3(\nu\partial^3 y)=0,\\
&\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right)-\partial(\lambda\partial z)+\partial^2(\mu\partial^2 z)-\partial^3(\nu\partial^3 z)=0,
\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots (ee)$$

De voorwaarde van het beperkt zijn der beweging bestaat in het verbonden zijn des ligchaams met een vast punt. Worden van dit punt af de coördinaten gerekend en ook (als beginpunt) de integralen, dan is, door deze laatste vooronderstelling, $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, en dan ook $\delta x'=0$, $\delta y'=0$, $\delta z',=0$. Hierdoor vallen uit de vergelijking *(dd)* die termen weg, welke, buiten de integraal, met $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ vermenigvuldigd worden, en de variatiën aan de limieten der integraal nu verder aan geene bijzondere voorwaarden onderworpen zijnde, kunnen de coëfficienten der onderscheidene variatiën en differentialen van variatiën, behoorende tot de termen buiten de integraal, alle gelijk *nul* worden gesteld. Daardoor komen, in de tweede plaats, deze tot de grenzen der integraal betrekking hebbende vergelijkingen of voorwaarden:

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda''\partial x''-\partial(\mu''\partial^2 x'')+\partial^2(\nu''\partial^3 x)=0;\\
&\lambda''\partial y''-\partial(\mu''\partial^2 y'')+\partial^2(\nu''\partial^3 y)=0;\\
&\lambda''\partial z''-\partial(\mu''\partial^2 z'')+\partial^2(\nu''\partial^3 z)=0.\\
&\mu''\partial^2 x''-\partial(\nu''\partial^3 x'')=0;\ \mu''\partial^2 y''-\partial(\nu''\partial^3 y'')=0;\ \mu''\partial^2 z''-\partial(\nu''\partial^3 z'')=0;\\
&\mu'\partial^2 x'-\partial(\nu'\partial^3 x')=0;\ \mu'\partial^2 y'-\partial(\nu'\partial^3 y')=0;\ \mu'\partial^2 z'-\partial(\nu'\partial^3 z')=0.\\
&\nu''\partial^3 x''=0;\ \nu''\partial^3 y''=0;\ \nu''\partial^3 z''=0;\ \nu'\partial^3 x'=0;\ \nu'\partial^3 y'=0;\ \nu'\partial^3 z'=0;\\
&\text{dat is } \nu''=0 \text{ en } \nu'=0.
\end{aligned}\right\}\;\ldots (ff)$$

De eerste integralen van de vergelijkingen (*ee*) zijn:

$$\left.\begin{aligned}\int\left(X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right)-\lambda\partial x+\partial\{\mu\partial^2 x-\partial(\nu\partial^3 x\}&=D,\\ \int\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)-\lambda\partial y+\partial\{\mu\partial^2 y-\partial(\nu\partial^3 y\}&=E,\\ \int\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right)-\lambda\partial z+\partial\{\mu\partial^2 z-\partial(\nu\partial^3 z\}&=F.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(gg)$$

Aan de eerste limiet zijn de integralen, dat is de eerste termen van de voorste leden dezer vergelijkingen, *nul;* ook zijn, aan dezelfde limiet, de derde termen der voorste leden *nul* (zie (*ff*)); derhalve komt:

$$-\lambda'\partial x'=D,\quad -\lambda'\partial y'=E,\quad -\lambda'\partial z'=F\ldots\ldots\ldots\ldots(hh)$$

Let men op de tweede limiet, dan hebben de integralen betrekking tot de geheele massa, en ingevolge de drie eerste vergelijkingen (*ff*) zullen de overige termen der voorste leden van de vergelijkingen (*gg*), te zamen genomen in elke vergelijking, *nul* zijn. Gevolgelijk zal men hebben met betrekking tot de geheele massa:

$$\int\left(X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right)=D,\quad\int\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)=E,\quad\int\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right)=F.\ .\ (ii)$$

Door eliminatie van λ uit de vergelijkingen (*gg*), twee aan twee genomen, kan men drie andere vergelijkingen vormen, die, wederom geïntegreerd zijnde (en zulks, waar het noodig of gepast is, bij gedeelten), deze tweede integralen zullen opleveren:

$$\left.\begin{aligned}&y\int\left(X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right)-x\int\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)-\int\left\{yX\partial m-xY\partial m-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m+x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right\}\\&\quad+\{\mu\partial^2 x-\partial(\nu\partial^3 x)\}\partial y-\{\mu\partial^2 y-\partial(\nu\partial^3 y)\}\partial x+\nu(\partial^2 y\partial^3 x-\partial^2 x\partial^3 y)=Dy-Ex+G;\\&z\int\left(X\partial m-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m\right)-x\int\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right)-\int\left\{zX\partial m-xZ\partial m-z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\partial m+x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\\&\quad+\{\mu\partial^2 x-\partial(\nu\partial^3 x)\}\partial z-\{\mu\partial^2 z-\partial(\nu\partial^3 z)\}\partial x+\nu(\partial^2 z\partial^3 x-\partial^2 x\partial^3 z)=Dz-Fx+H;\\&z\int\left(Y\partial m-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m\right)-y\int\left(Z\partial m-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right)-\int\left\{zY\partial m-yZ\partial m-z\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\partial m+y\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\partial m\right\}\\&\quad+\{\mu\partial^2 y-\partial(\nu\partial^3 y)\}\partial z-\{\mu\partial^2 z-\partial(\nu\partial^3 z)\}\partial y+\nu(\partial^2 z\partial^3 y-\partial^2 y\partial^3 z)=Ez-Fy+I.\end{aligned}\right\}(kk)$$

Aan de eerste limiet der integralen zijn $x=x'=0$, $y=y'=0$, $z=z'=0$, $\nu=\nu'=0$. De onbepaalde integralen zijn mede *nul*, gelijk ook, ingevolge de vergelijkingen (*ff*), de coëfficienten van ∂x, ∂y, ∂z in de termen buiten de integralen. En hiermede worden de willekeurige standvastige grootheden G, H, I gelijk *nul*. Voor de tweede limiet zullen de vergelijkingen (*kk*) betrekking hebben tot de geheele massa; desgelijks de vergelijkingen (*ii*).

Daarom zullen, b. v. van de eerste der vergelijkingen (*kk*), de twee eerste termen kunnen vervangen worden door $y''D - x''E$; maar zij worden dan opgeheven door de termen $Dy'' - Ex''$ in het tweede lid, en dit tweede lid wordt hierdoor *nul*. Daar verder ook $\nu = \nu'' = 0$, en eveneens de coëfficienten van ∂y en ∂x aan de tweede limiet *nul* zijn (zie (*ff*)), zal er alleenlijk, met betrekking tot de geheele massa, de derde term van het voorste lid overig blijven. Op dezelfde wijze komt dergelijk besluit voor de tweede en derde vergelijkingen (*kk*). Zij worden derhalve herleid tot drie integralen, elke gelijk *nul*, en deze geven dan terstond de drie vergelijkingen der beweging, namelijk de vergelijkingen (49), in art. 2 van § II gevonden.

Om de formulen voor de drukkingen tegen het vaste punt te verkrijgen, merke men op, dat de eerste der voorwaardes-vergelijkingen (*bb*) voor de variatiën der coördinaten (en van welke al de termen eigenlijk nog 2 tot factor zouden moeten hebben), voortgekomen is uit de eerste der vergelijkingen (*aa*), zoodat hier de niet gevariëerde of oorspronkelijke voorwaardes-vergelijking is

$$L = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 - \alpha = 0,$$

zijnde eene functie, niet van coördinaten, maar van differentialen van coördinaten. Zij is de uitdrukking voor den afstand van eenig *eerste* punt der massa tot eenig onmiddellijk opvolgend *tweede* punt. Hiertoe heeft dan ook betrekking de onbepaalde factor λ, met welken de eerste der gevariëerde voorwaardes-vergelijkingen, dat is de eerste der vergelijkingen (*bb*), is vermenigvuldigd geworden. Het eerste punt, dat, ter bepaling van λ, als eerste punt voor de geheele massa in aanmerking komt, is klaarblijkelijk het punt aan de eerste limiet der integralen, derhalve het vaste punt. De voorwaarde $L = \alpha$ — enz. zal dienvolgens betrekking hebben tot een punt, onmiddellijk grenzende aan het vaste punt, en λ' zal dan betrekking moeten hebben tot eene drukking, uitgeoefend tegen het vaste punt in de rigting van eenig regtlijnig differentiaal-element $\partial s'$; de hoegrootheid der drukking zelve zal $\lambda' U'$ tot uitdrukking hebben. Voor de waarde λ' van λ, ter plaatse van het vaste punt, geven de vergelijkingen (*hh*), als in deze $2\lambda'$ gesteld wordt voor λ',

$$\lambda' = -\frac{1}{2\,\partial x'}D = -\frac{1}{2\,\partial y'}E = -\frac{1}{2\,\partial z'}F.$$

Verder is

$$U' = \pm \sqrt{\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial(\partial x')}\right]^2 + \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial y')}\right]^2 + \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial z')}\right]^2\right\}} = \pm 2\sqrt{\{(\partial x')^2 + (\partial y')^2 + (\partial z')^2\}} = \pm 2\partial s';$$

weshalve de grootte der drukking, uitgeoefend tegen het vaste punt in eenige willekeurige rigting, zal bepaald zijn door

$$\lambda' U' = \frac{\partial s'}{\partial x'}.D = \frac{\partial s'}{\partial y'}.E = \frac{\partial s'}{\partial z'}.F.$$

Hieruit is blijkbaar dat D, E, F, kunnen aangemerkt worden als zijnde de grootten van

drukkingen, uitgeoefend tegen het vaste punt in de rigting der coördinaten-assen van de massa. Derhalve zal men voor de zamenstellende totale drukkingen hebben (zie (*ii*)):

$$D_x = \int X \partial m - \int \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \partial m,$$

$$D_y = \int Y \partial m - \int \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \partial m,$$

$$D_z = \int Z \partial m - \int \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \partial m.$$

Deze uitdrukkingen zijn dezelfde als de uitdrukkingen of formulen (*c*), in art. 6 van § II gevonden, en uit welke, door het ontwikkelen der integralen, verkregen zijn de formulen (57), die de nader bepaalde waarden voor de zamenstellende drukkingen doen bekend worden.

LEIDEN, 1860.